

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

**MÉTODOS DE ELEMENTOS
FINITOS MIXTOS CON
DEFORMACIONES SUPUESTAS
EN ELASTOPLASTICIDAD**

TESIS DOCTORAL

FELIPE GABALDÓN CASTILLO
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

MADRID, 1999

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS Y
TEORÍA DE ESTRUCTURAS
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

**MÉTODOS DE ELEMENTOS
FINITOS MIXTOS CON
DEFORMACIONES SUPUESTAS
EN ELASTOPLASTICIDAD**

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA POR:

FELIPE GABALDÓN CASTILLO

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

DIRIGIDA POR:

JOSE M. GOICOLEA RUIGOMEZ

MADRID, 1999

A Felipe Gabaldón Simarro,
in memoriam

A Carmen Castillo Villodre

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecerle al Profesor Jose María Goicolea, mi director de tesis, sus consejos y apoyo para el desarrollo de la misma. Los años de trabajo conjunto han hecho que él sea mi maestro y amigo.

Al Profesor Carlos García Garino, de la Universidad Nacional de Cuyo (Argentina), no sólo le tengo que agradecer sus enseñanzas en lo referente a los modelos de plasticidad con grandes deformaciones, sino también sus consejos y estímulos a lo largo de este trabajo.

Las explicaciones del Profesor Miguel Ortiz, del California Institute of Technology, fueron imprescindibles para los trabajos referentes a la estimación de error. Asimismo, él nos ha facilitado el modelo modificado de Drucker-Prager que se ha implementado en este trabajo.

También han sido especialmente valiosas las conversaciones con el Profesor Francisco Armero, de la Universidad de Berkeley (California), referentes a la tecnología y aspectos computacionales de los elementos con deformaciones supuestas.

Al Profesor Francisco Martínez debo agradecerle su apoyo en algunos desarrollos al comienzo de la tesis, y en ciertos aspectos computacionales del modelo de Drucker-Prager en la fase final de la misma.

Al profesor Robert Taylor le agradezco la disponibilidad de la versión mejorada de su programa de elementos finitos **FEAP**. Ello me ha permitido implementar en un entorno de trabajo avanzado todas las formulaciones de elementos, modelos constitutivos y algoritmos de estimación de error que se describen en este trabajo.

A mis compañeros del Grupo de Mecánica Computacional, de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, les agradezco el haberme hecho más llevaderas las horas de trabajo que he compartido con ellos. Sobre todo a Juan José Arribas, Juan Carlos García y Yolanda Cabrero.

Por último debo un agradecimiento muy especial a Ana por su apoyo constante a lo largo de estos años, y a mi hija Alba. Ella ha sido la que, sin darse cuenta, más fuerza me ha dado en los momentos difíciles.

RESUMEN

El trabajo desarrollado en esta tesis se encuentra en el contexto de los elementos mixtos con deformaciones supuestas en plasticidad. Empleando las formulaciones para deformaciones infinitesimales y para deformaciones finitas, que se analizan de manera crítica y detallada al principio de este trabajo, se investigan diversos aspectos de su comportamiento.

La respuesta en problemas de plasticidad con grandes deformaciones se estudia mediante un modelo basado en la descomposición multiplicativa del gradiente de deformaciones, y en la actualización multiplicativa del tensor elástico de Finger para definir la configuración intermedia. Se presentan varios ejemplos de validación y la aplicación al ensayo de tracción simple con estricción.

La relación entre la contribución de los modos mejorados a la solución aproximada y la calidad de la misma se analiza mediante técnicas de estimación de error. Se propone un estimador de error basado en la norma energética de los modos mejorados de deformación, evaluada de forma incremental. Este estimador se aplica a problemas de elasticidad lineal y no lineal con deformaciones finitas, y a problemas de plasticidad con deformaciones infinitesimales. En este último caso las ecuaciones constitutivas se integran con un esquema que conserva de manera incremental la estructura variacional del problema de contorno.

Finalmente, los elementos mejorados se aplican en problemas de localización, en la hipótesis de que en la banda de corte el campo de desplazamientos es continuo y el campo de deformaciones es discontinuo. Para plasticidad de Von-Mises con deformaciones infinitesimales se parte de la tasa de segundo orden de la energía de deformación, con objeto de evaluar las prestaciones de los elementos. En deformación plana y tensión plana se compara, de forma analíticamente exacta, la capacidad de los elementos mejorados frente a otros elementos convencionales ($Q4$ y $Q1/P0$) para capturar las bandas de localización en distintas direcciones. En grandes deformaciones se presentan dos ejemplos. El primero es un ejemplo de localización en un elemento, analizando la evolución de la energía interna, del determinante del tensor acústico y de los modos de deformación asociados a la matriz de rigidez tangente. En el segundo ejemplo se presentan los resultados obtenidos en el ensayo de tracción de una probeta, en el supuesto de deformación plana. En el caso del modelo no asociativo de Drucker-Prager aplicado a problemas de localización, en primer lugar se analiza la influencia de la dilatancia en la trayectoria de las tensiones para los ensayos de una probeta en deformación plana sometida a tracción, a compresión y a tracción-compresión. Por último se analizan los mecanismos de rotura en ciertos problemas de interés geotécnico: estabilidad de taludes y cargas de hundimiento de zapatas.

ABSTRACT

In this thesis, the behaviour of finite elements with enhanced assumed strain formulation has been analysed for non-linear elastic-plastic problems.

The response of these elements in finite plasticity problems has been studied via a constitutive model based in the multiplicative decomposition of the deformation gradient. The definition of the intermediate configuration is computed through the multiplicative updating of the elastic Finger's tensor. An application example of this model presented here is the simple tension test with necking.

The quality of the finite element solution and the contribution of the enhanced modes are related using error estimation techniques. The error estimator proposed is based on the energy norm of the enhanced strain modes. After description of its theoretical formulation, the error estimator is applied to several problems in linear and non-linear finite elasticity, and in plasticity at small strains. For plasticity, the constitutive equations are integrated using an incremental scheme that incrementally preserve the variational structure of the boundary-value problem.

Finally, the enhanced assumed strain elements are applied to localisation problems in the weak discontinuities hypothesis. For classical Von-Mises plasticity, the performance of the elements in order to capture shear bands is evaluated. The second order rate of the internal energy is used for computing, in closed form, the ability of the elements for capturing the bands in several directions. Plain strain and plane stress hypothesis are considered. In finite plasticity two examples are considered. The first one is a single element localisation test, in which the evolution of several variables is analysed: internal energy, determinant of the acoustic tensor and eigenmodes of the tangent stiffness matrix. In the second example, the plane strain tension test with shear bands is presented. In the final part of the thesis, a non-associative Drucker-Prager model is applied to localisation problems. At first, the influence of dilatancy angle in the stress trajectories is studied for plain strain tension, compression and tension-compression tests. The chapter is ended with several simulations of collapse in classical soil mechanics: slope stability problems and limit load of foundations.

Índice general

1. Introducción y Objetivos	1.1
1.1. Introducción: motivación	1.1
1.2. Objetivos	1.3
1.3. Contenido de la tesis	1.3
2. Tecnología de Elementos Mixtos	2.1
2.1. Resumen y Objetivos	2.1
2.2. Introducción	2.2
2.3. Elementos para deformaciones infinitesimales	2.5
2.3.1. Formulación de la elasticidad infinitesimal con el funcional de Hu-Washizu	2.5
2.3.2. Formulación variacional modificada con campos de deformaciones mejoradas supuestas	2.7
2.3.3. Formulación del problema variacional mediante elementos finitos mixtos	2.8
2.3.4. Formulación matricial	2.10
2.3.5. Condiciones de convergencia	2.11
2.3.6. Diseño de elementos con campos de deformaciones mejoradas	2.12
2.3.7. Implementación numérica	2.15
2.3.8. Análisis espectral	2.17
2.3.9. Cinemática de los elementos con deformaciones mejoradas supuestas	2.20
2.3.10. Ejemplos	2.21
2.4. Elementos para grandes deformaciones	2.27
2.4.1. Formulación de la elasticidad finita con el funcional de Hu-Washizu	2.27
2.4.2. Formulación variacional modificada con campos de deformaciones mejoradas supuestas	2.30
2.4.3. Formulación aproximada mediante elementos finitos mixtos	2.31
2.4.4. Formulación matricial	2.33
2.4.5. Condiciones de convergencia y estabilidad	2.34
2.4.6. Diseño de elementos	2.35
2.4.7. Implementación numérica	2.37

2.4.8. Problemas con la subintegración de los elementos: Ejemplos	2.38
2.5. Conclusiones	2.44
3. Elastoplasticidad con grandes deformaciones	3.1
3.1. Resumen y Objetivos	3.1
3.2. Introducción	3.2
3.3. Modelos hiperelásticos	3.2
3.3.1. Definición	3.2
3.3.2. Tensor elástico tangente	3.3
3.3.3. Hiperelasticidad isótropa	3.4
3.4. Modelos basados en la descomposición multiplicativa	3.5
3.5. Cinemática del problema elastoplástico	3.7
3.6. Definición del modelo constitutivo	3.11
3.6.1. Función de energía libre	3.11
3.6.2. Tensor de tensiones y tensor elástico tangente	3.12
3.6.3. Potencial plástico y criterio de fluencia	3.12
3.6.4. Ley de endurecimiento	3.13
3.6.5. Regla de flujo	3.13
3.6.6. Condiciones de carga y descarga. Condición de consistencia	3.14
3.6.7. Tensor tangente elastoplástico	3.15
3.6.8. Expresión del modelo en la configuración deformada	3.16
3.7. Integración de las ecuaciones de la plasticidad	3.17
3.7.1. Introducción	3.17
3.7.2. Método Predictor-Corrector	3.18
3.7.3. Predictor elástico	3.18
3.7.4. Corrector plástico	3.19
3.7.5. Algoritmo de retorno (Euler implícito)	3.20
3.7.6. Tensor tangente elastoplástico consistente	3.24
3.8. Aspectos computacionales	3.26
3.9. Ejemplos de validación	3.27
3.9.1. Probeta con doble entalla	3.27
3.9.2. Ménsula elastoplástica en deformación plana	3.30
3.9.3. Viga biempotrada con grandes deformaciones	3.34
3.9.4. Cilindro de pared gruesa con presión interna	3.35
3.9.5. Aplastamiento de un disco cilíndrico	3.39
3.10. Aplicación: El ensayo de tracción simple con estricción	3.40
3.10.1. Introducción	3.41
3.10.2. Modelo constitutivo	3.41
3.10.3. Interpretación analítica	3.42
3.10.4. Definición del modelo numérico	3.45
3.10.5. Resultados	3.46
3.11. Conclusiones	3.52

4. Estimación de error	4.1
4.1. Resumen y Objetivos	4.1
4.2. Introducción	4.2
4.2.1. Antecedentes	4.2
4.2.2. Estimadores de error para análisis lineal	4.4
4.2.3. Estimadores de error para análisis no lineal	4.8
4.3. Elasticidad Infinitesimal	4.15
4.3.1. Problema de contorno	4.15
4.3.2. Estructura variacional del problema de contorno	4.15
4.3.3. Metodología de aproximación	4.18
4.3.4. Estimación local del error	4.19
4.3.5. Estimación global del error	4.21
4.3.6. Estimación del error “a posteriori”	4.22
4.3.7. Estimador de error propuesto en este trabajo	4.22
4.3.8. Ejemplos	4.24
4.4. Elasticidad con grandes deformaciones	4.38
4.4.1. Problema de contorno	4.38
4.4.2. Estructura variacional del problema de contorno	4.38
4.4.3. Metodología de aproximación	4.41
4.4.4. Estimación del error	4.42
4.4.5. Estimación del error “a posteriori”	4.43
4.4.6. Estimador de error propuesto en este trabajo	4.43
4.4.7. Ejemplos	4.46
4.5. Plasticidad en pequeñas deformaciones	4.60
4.5.1. Integración variacional de las ecuaciones de la plasticidad	4.60
4.5.2. Interpretación numérica del potencial incremental	4.62
4.5.3. Problema de contorno	4.63
4.5.4. Estructura variacional del problema de contorno	4.64
4.5.5. Estimador de error propuesto en este trabajo	4.66
4.5.6. Ejemplos	4.71
4.6. Conclusiones	4.86
5. Aplicaciones: Localización	5.1
5.1. Resumen y Objetivos	5.1
5.2. Localización en materiales con plasticidad de Von-Mises	5.2
5.2.1. Introducción y Objetivos	5.2
5.2.2. Criterio de localización	5.4
5.2.3. Análisis de la localización en medios continuos	5.6
5.2.4. Análisis numérico de la localización	5.8
5.2.5. Ejemplos	5.27
5.2.6. Conclusiones	5.40
5.3. Localización en materiales cohesivo-friccionales	5.40
5.3.1. Introducción	5.40
5.3.2. Modelo constitutivo	5.41
5.3.3. Consecuencias de la no asociatividad	5.43

5.3.4.	Fenómenos de localización de deformaciones	5.48
5.3.5.	Ejemplos	5.48
5.3.6.	Conclusiones	5.65
6.	Conclusiones	6.1
6.1.	Resumen del trabajo realizado	6.1
6.2.	Conclusiones de la investigación desarrollada	6.2
6.3.	Aportaciones	6.4
6.4.	Líneas de investigación propuestas	6.5
A.	Plasticidad Infinitesimal	A.1
A.1.	Ecuaciones locales de la plasticidad	A.1
A.1.1.	Modelo constitutivo	A.1
A.1.2.	Tensor elastoplástico tangente	A.4
A.2.	Plasticidad de Von Mises	A.6
A.2.1.	Integración implícita de las ecuaciones	A.8
A.2.2.	Tensor elastoplástico tangente consistente	A.10
A.3.	Plasticidad de Drucker-Prager	A.11
A.3.1.	Integración implícita de las ecuaciones	A.14
A.3.2.	Tensor elastoplástico tangente consistente	A.16
B.	Algunos conceptos de mecánica no lineal de medios conti- nuos	B.1
B.1.	Configuraciones, Movimiento y Deformación	B.1
B.2.	Operadores Push-forward y Pull-back	B.3
B.3.	Tensores de Deformación	B.6
B.4.	Objetividad	B.7
B.5.	Tensor Velocidad de Deformación	B.9
B.6.	Tensores de Tensión	B.10
C.	Análisis Funcional	C.1
C.1.	Espacios Normados	C.1
C.2.	Operadores	C.4
C.3.	Operadores Lineales	C.4
C.4.	Producto interior	C.5
C.5.	Espacios de Lebesgue	C.6
C.6.	Espacios de Sobolev	C.7
C.7.	Cálculo variacional	C.8

Capítulo 1

Introducción y Objetivos

1.1. Introducción: motivación

El método de los elementos finitos es actualmente una herramienta de cálculo habitual en múltiples campos de la ingeniería. Si bien en el ámbito de la mecánica de sólidos, las líneas de investigación en problemas lineales están muy desarrolladas (a excepción de los métodos numéricos de solución de grandes sistemas de ecuaciones), en el ámbito no lineal hay numerosos problemas abiertos, y gran parte de ellos en el contexto de la plasticidad computacional.

La plasticidad computacional tiene por objeto simular los procesos de deformación de sólidos en los que aparecen deformaciones irreversibles. El interés de este tipo de simulaciones sigue aumentando dentro de la ingeniería ya que permite reproducir el comportamiento de materiales como suelos, rocas, hormigones, metales, etc. en situaciones muy diversas. Como ejemplo se pueden señalar las correspondientes a los mecanismos de agotamiento y rotura de elementos estructurales, los procesos de conformado de metales en los que el efecto de las deformaciones no recuperables está controlado y tiene una finalidad específica, la respuesta estructural a solicitaciones severas (explosión, impacto ...), etc.

Para abordar este tipo de fenómenos es necesario emplear modelos constitutivos que sean robustos y eficientes desde el punto de vista computacional. Asimismo, la modelización de estos problemas lleva asociada, entre otras dificultades, las inherentes al propio tratamiento numérico: bloqueo de la malla en situaciones de flujo plástico isocórico, modos de energía nula en los elementos, problemas de convergencia en situaciones altamente no lineales, detección y tratamiento adecuado de contactos, etc. Asimismo, existen inconvenientes adicionales en el caso en que haya grandes deformaciones: elevada distorsión de los elementos, necesidad de considerar las grandes rotaciones para que los resultados sean objetivos, etc. Por estas razones es imprescindible emplear formulaciones de elementos distintas de las habituales en problemas lineales.

De las formulaciones disponibles para problemas no lineales, una especialmente atractiva es la de los elementos con deformaciones mejoradas su-

puestas. El interés de esta familia de elementos radica en su formulación de tipo general que hace que la respuesta presente ventajas frente a otras formulaciones, en problemas muy diversos:

- Con mallas de pocos elementos se obtienen soluciones precisas tanto en problemas en los que la respuesta estructural corresponde principalmente a estados de flexión, como en situaciones cuasi-incompresibles.
- Las variables básicas, desplazamientos y deformaciones, son adecuadas para modelos constitutivos de plasticidad.
- La cinemática de los elementos permite capturar bandas en las que se localizan las deformaciones plásticas.
- El orden de la interpolación es bajo pudiéndose abordar problemas de contacto.

Los elementos con deformaciones mejoradas supuestas se formularon en 1992 para problemas con deformaciones infinitesimales ([Simó y Rifai, 1990](#)), y en 1993 para problemas de grandes deformaciones ([Simó y Armero, 1993](#)). Hasta 1996 numerosos investigadores dedicaron sus trabajos a mejorar la estabilidad y prestaciones de estos elementos ([Simó et al., 1993a](#); [Crisfield et al., 1995](#); [Souza et al., 1995](#); [Arunakirinathar y Reddy, 1995](#); [Roehl y Ramm, 1996](#); [Nagtegaal y Fox, 1996](#); [Korelc y Wriggers, 1996](#)). Si bien actualmente han dejado paso a elementos “de nueva generación” para problemas más especializados, los elementos de deformaciones supuestas están implementados en códigos comerciales avanzados ([ABAQUS, 1994](#)), y siguen siendo el punto de partida para el diseño de elementos orientados a abordar problemas del estado del arte ([Armero y Garikipati, 1996](#); [Manzoli, 1998](#); [Cesar y Natal, 1999](#))

Esta tesis se enmarca en el contexto de los elementos mejorados con deformaciones supuestas, empleando modelos de plasticidad con grandes deformaciones. Los trabajos desarrollados abarcan:

1. Análisis pormenorizado de la formulación de los elementos de deformaciones supuestas
2. Implementación computacional de estos elementos para problemas de plasticidad con grandes deformaciones, con ejemplos de validación.
3. Análisis de las prestaciones de los elementos en problemas de localización de deformaciones, realizando estudios y pruebas para evaluar sus capacidades y limitaciones.
4. Desarrollo de metodologías para la estimación de error en problemas lineales y no lineales, empleando medidas energéticas de los modos mejorados de deformación.

Todos los tipos de elementos empleados en este trabajo, los modelos constitutivos y los algoritmos de estimación de error han sido implementados por el autor en la versión 6.2. del programa de elementos finitos FEAP ([Taylor, 1999](#)), haciendo uso de las rutinas de usuario de las que dispone el programa. El lenguaje de programación que se ha empleado es FORTRAN 77 y el código ejecutable se ha generado para el sistema operativo LINUX, con el compilador de dominio público `fort77`.

Para el post-proceso de resultados y edición de la tesis se han empleado exclusivamente programas con licencia GPL (General Public License), cuya disponibilidad es libre y gratuita. El post-proceso se ha realizado con `gnuplot`, `xfig`, `pstoedit`, etc. La edición de la tesis se ha hecho con el procesador de textos \LaTeX , junto con \BibTeX para el manejo de referencias bibliográficas.

1.2. Objetivos

Los objetivos de esta tesis se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Realizar una revisión detallada y crítica de la formulación de elementos finitos no lineales con deformaciones mejoradas supuestas, tanto para problemas con deformaciones infinitesimales como con grandes deformaciones. Para ello se abordarán los aspectos analíticos y computacionales de la implementación de los elementos, el estudio de su cinemática y el análisis de su comportamiento espectral.
- Implementar en el contexto de dichos elementos un modelo constitutivo de plasticidad con grandes deformaciones, robusto y eficiente desde el punto de vista computacional.
- Investigar la relación entre la calidad de la solución aproximada obtenida en problemas lineales y no lineales, y la contribución energética de los modos mejorados de deformación. Esta relación se cuantificará mediante un estimador de error.
- Analizar las prestaciones de los elementos mejorados en la simulación de fenómenos de localización de deformaciones en metales, y en materiales cohesivo-friccionales con modelos no asociativos.

1.3. Contenido de la tesis

Esta tesis consta de seis capítulos de los cuales el primero es esta introducción, y de tres apéndices.

El capítulo 2 introduce la formulación de los elementos con deformaciones mejoradas supuestas, tanto para problemas geoméricamente lineales ([Simó y Rifai, 1990](#)) como de grandes deformaciones ([Simó y Armero, 1993](#);

[Armero y Glaser, 1997](#)). Se describe la formulación de los elementos a partir del funcional de Hu-Washizu, la metodología de diseño de los mismos y su implementación numérica en un programa de elementos finitos. Para la formulación en deformaciones infinitesimales se analiza el comportamiento de los elementos en flexión y en régimen cuasi-incompresible a partir del análisis espectral exacto de la matriz de rigidez. Asimismo se discute de manera detallada la contribución de los modos mejorados en la cinemática del elemento, y se presentan algunos ejemplos de validación. En grandes deformaciones se analiza la importancia del orden de la cuadratura empleada en la respuesta de los elementos, mediante ejemplos numéricos significativos.

El capítulo 3 se dedica al modelo constitutivo de plasticidad con grandes deformaciones ([Garino, 1993](#)) que se emplea con los elementos de deformaciones supuestas. En primer lugar se describen los modelos de hiperelasticidad isótropa. Antes de definir el modelo constitutivo se desarrollan los conceptos correspondientes a la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones y a la cinemática del continuo elastoplástico con grandes deformaciones. Una vez definido el modelo se explica la metodología de integración de las ecuaciones de la plasticidad. Los últimos apartados se dedican a los aspectos computacionales de carácter general, y a la implementación del modelo con elementos de deformaciones supuestas, presentándose además varios ejemplos de validación. El capítulo finaliza con un análisis detallado de la simulación del ensayo de tracción simple, cuando se desarrolla un cuello o estricción en la zona central de la probeta.

En el capítulo 4 se propone una metodología de estimación de error, empleando elementos de deformaciones supuestas, basada en la medida energética de los modos mejorados de deformación. El capítulo comienza con una revisión del estado del arte. En los tres apartados siguientes se describe la formulación del estimador de error propuesto para elasticidad infinitesimal, elasticidad no lineal con grandes deformaciones, y plasticidad con pequeñas deformaciones. En cada uno de ellos se establecen los requerimientos para que el problema tenga estructura variacional, al menos en forma incremental. Esto tiene especial relevancia en el caso de la plasticidad, ya que la integración de las ecuaciones constitutivas debe respetar dicha estructura ([Ortiz y Stainier, 1998](#)). También se describen los aspectos relacionados con su implementación en un programa de elementos finitos, y se analizan sus limitaciones. Cada apartado termina con varios ejemplos de aplicación representativos.

El capítulo 5 se dedica al estudio y análisis de las prestaciones de los elementos mejorados en problemas de localización y consta de dos apartados principales. En el primer apartado se aplican modelos elastoplásticos asociativos basados en el criterio de Von Mises. Partiendo de las hipótesis de localización débil se describe el criterio de localización, que es el correspondiente a que se anule el determinante del tensor acústico. A continuación se analiza la localización de deformaciones en medios continuos con las hipótesis de deformación plana y tensión plana, obteniéndose expresiones exactas del módulo de endurecimiento crítico, mediante un programa de matemática

formal. A partir de estos resultados, se analizan también de manera analíticamente exacta las prestaciones de distintos elementos mejorados de tensión y deformación plana, para capturar bandas de localización según distintas orientaciones (Steinmann y Willam, 1991). Este apartado finaliza con dos ejemplos de grandes deformaciones. En el primero de ellos se estudia la evolución del tensor acústico, de los modos espectrales del elemento y de la energía interna en un test de localización de un elemento (Simó y Armero, 1993). El segundo ejemplo modeliza el desarrollo de bandas de corte en el ensayo de tracción en deformación plana (Simó et al., 1993a). En el segundo apartado se aborda la localización en modelos elastoplásticos no asociativos. Como introducción, una vez descrito el modelo constitutivo empleado, se muestra con ejemplos básicos distintas consecuencias significativas de la no asociatividad (Vermeer y de Borst, 1984). El análisis de la localización comienza con el estudio de las trayectorias de la presión y del segundo invariante del tensor de tensiones desviadoras, en estados de carga sencillos resueltos con un elemento (Manzoli, 1998). Finalmente se presentan varios ejemplos de mecánica de suelos en los que se predice el mecanismo de rotura: estabilidad de taludes a 90° y 45° , y cargas de hundimiento de zapatas.

El capítulo 6 se dedica a recapitular el trabajo desarrollado en la tesis, a establecer las conclusiones de la misma, y a describir las líneas que quedan abiertas a futuros trabajos de investigación.

En los apéndices se detallan algunas cuestiones sobre las que se ha hecho referencia en los capítulos de la tesis, y sirven de complemento al cuerpo principal de la misma. En el Apéndice A se describen los modelos constitutivos de Von-Mises y Drucker-Prager para deformaciones infinitesimales, y la integración de las ecuaciones con esquemas implícitos. En el Apéndice B se exponen conceptos de la mecánica no lineal de medios continuos con grandes deformaciones relacionados con las deformaciones, las tensiones y la cinemática. El Apéndice C describe ideas básicas de Análisis Funcional, que son utilizadas para la formulación del estimador de error en el capítulo 4.

Capítulo 2

Tecnología de Elementos Mixtos

2.1. Resumen y Objetivos

En este capítulo se aborda el análisis de la tecnología de una clase de elementos mixtos, derivados a partir del funcional de tres campos de Hu-Washizu, denominados *elementos mejorados con deformaciones supuestas*, y que en la literatura se denominan abreviadamente elementos EAS (del acrónimo inglés *Enhanced Assumed Strain*). Para ello se presenta de manera razonada su formulación matemática, la implementación computacional y los aspectos relacionados con su comportamiento: análisis espectral, cinemática, etc.

Después de una introducción general, el capítulo se ha estructurado en dos grandes apartados: la formulación EAS en problemas de deformaciones infinitesimales ([Simó y Rifai, 1990](#)) y en problemas geoméricamente no lineales ([Simó y Armero, 1993](#)). Con objeto de uniformizar la presentación de ambas formulaciones, el orden seguido en el desarrollo de estos dos apartados es el mismo:

1. Formulación variacional y reparametrización con los campos mejorados.
2. Aproximación mediante espacios funcionales de dimensión finita para obtener una formulación matricial del problema.
3. Análisis de las condiciones de estabilidad.
4. Metodología de diseño de elementos EAS.
5. Implementación computacional.

Para la formulación en deformaciones infinitesimales se ha realizado un análisis espectral, mediante expresiones analíticas, de los elementos EAS y de otras formulaciones estándar analizando de manera crítica los resultados

obtenidos. Asimismo se describe razonadamente la contribución de los modos mejorados a la cinemática de estos elementos. Finalmente se presentan algunos ejemplos básicos representativos de sus prestaciones.

En la formulación para grandes deformaciones se dedica un apartado al problema de la subintegración de los elementos con la cuadratura de Gauss de 2×2 puntos (Simó et al., 1993a). Este problema se ilustra con dos ejemplos en deformación plana: la extensión simple de un elemento y el ensayo de tracción de una probeta en el que se forma una estricción. Se ha preferido dejar para el capítulo 3 los ejemplos básicos de plasticidad con grandes deformaciones, y para el capítulo 5 los ejemplos de localización.

Finalmente, se dedica un apartado a las conclusiones del capítulo.

2.2. Introducción

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es una técnica que permite obtener soluciones aproximadas de las ecuaciones en derivadas parciales que rigen el comportamiento de los medios continuos, mediante un sistema de ecuaciones, algebraicas en el caso de problemas estáticos, que relacionan un número finito de variables. Para construir este sistema se requiere:

1. La formulación variacional del problema a resolver.
2. La aproximación de las ecuaciones variacionales empleando funciones de un espacio de dimensión finita.

El MEF fue concebido inicialmente en 1956 para resolver problemas estructurales (Turner et al., 1956). Al entrar en la década de los 60 los avances en la construcción de ordenadores y las aplicaciones del MEF a otros campos de la ingeniería (Mecánica de Fluidos, Mecánica de Suelos y Rocas, Conducción de Calor, etc.), supuso un espectacular desarrollo del MEF. Ya no solo resultaban atractivas sus aplicaciones ingenieriles sino que atrajo el interés de gran número de científicos e investigadores, preocupados por sus bases teóricas y el desarrollo de nuevas posibilidades del Método: algoritmos para cálculos dinámicos y no lineales, desarrollo de nuevos elementos (en algunos casos muy complejos) que evitasen las dificultades numéricas detectadas para resolver ciertos tipos de problemas (materiales incompresibles, flexión de placas delgadas, no linealidades muy fuertes, etc.) y para mejorar la calidad de las soluciones obtenidas, etc. Esta líneas de investigación siguen actualmente en vigor.

La generalización del uso de los ordenadores ha hecho que actualmente, el MEF sea una herramienta de cálculo habitual para el ingeniero. La existencia de potentes programas de preproceso y de postproceso permiten introducir los datos del problema de manera relativamente cómoda, y visualizar de forma realista los resultados obtenidos. Además, el uso de programas de elementos finitos es prácticamente obligatorio hoy en día en proyectos que

requieran de tecnologías avanzadas (industria nuclear, aeronáutica, aeroespacial, automoción y grandes obras de ingeniería civil).

Elementos de altas prestaciones

Las investigaciones comenzadas en décadas pasadas para mejorar la calidad de las soluciones obtenidas, han cristalizado actualmente en diversas líneas de investigación, cuyo objetivo es el desarrollo de elementos de bajo orden que den resultados exactos en mallas poco refinadas: elementos híbridos ([Felippa, 1989b](#)), elementos mixtos, y otros elementos no convencionales ([Moitinho y Teixeira, 1992](#); [Teixeira et al., 1998](#)).

Históricamente, los elementos denominados mixtos comenzaron formulándose de manera empírica, obteniéndose elementos con unas prestaciones que se mostraban superiores a las de los elementos convencionales. Entre estos trabajos cabe destacar la formulación libre ([Bergan y Nygård, 1984](#)), la formulación volumétrica media ([Nagtegaal et al., 1974](#)), la formulación B-barra ([Hughes, 1980](#); [Hughes, 1987](#)) y su posterior justificación variacional ([Simó y Hughes, 1986](#)), la formulación de modos incompatibles ([Ibrahimbegovic y Wilson, 1991](#); [Taylor et al., 1976](#); [Wilson et al., 1973](#)), etc.

Diversos autores generalizaron la formulación de estos elementos a partir de principios variacionales establecidos para distintos funcionales mixtos. Así, a partir de los campos adicionales al de desplazamientos que están en el principio variacional utilizado, cabe hablar de:

Elementos de tensiones supuestas.

Parten del principio variacional de Hellinger-Reissner y los campos independientes son el de desplazamientos y el de tensiones. Elementos clásicos con esta formulación son los formulados en ([Pian y Sumihara, 1984](#)).

Elementos de deformaciones supuestas.

Estos elementos adoptan como campos independientes el de desplazamientos y el de deformaciones. La ventaja de las formulaciones con deformaciones supuestas frente a las de tensiones supuestas es que permiten su extensión a problemas elastoplásticos de manera casi directa. Actualmente, la solución iterativa más eficiente de las ecuaciones de la plasticidad se basa en los algoritmos de retorno. La variable básica de estos algoritmos es el incremento de deformaciones en cada paso de carga, por lo que es más conveniente que las variables independientes adicionales sean precisamente las deformaciones.

La formulación variacional clásica de estos elementos se desarrolla a partir de funcionales multicampo ([Felippa, 1989a](#); [Felippa, 1989b](#)), eliminando mediante criterios de ortogonalidad los campos independientes de tensiones.

En el contexto de los elementos con deformaciones supuestas, existen distintas formulaciones entre las que cabe destacar:

- **Formulación ANS** (Assumed Natural Strain). Esta formulación se establece a partir del principio variacional de Hellinger ([Militello y Felippa, 1990a](#); [Militello y Felippa, 1990b](#)), y también engloba como casos particulares la formulación B-barra y la integración reducida del funcional de la energía potencial total.
- **Formulación ANDES** (“Assumed Natural DEviatoric Strains” ([Felippa y Militello, 1990a](#))). En este caso el campo de deformaciones supuesto es el de deformaciones desviadoras expresadas en las denominadas coordenadas naturales.

La formulación variacional adoptada es relativamente compleja y parte del concepto de “Principio Variacional Parametrizado” ([Felippa, 1989a](#); [Felippa, 1989b](#); [Felippa y Militello, 1990b](#); [Felippa, 1991](#)) con objeto de justificar variacionalmente la formulación libre de Bergan y Nygård ([Bergan y Nygård, 1984](#); [Felippa, 1994](#)) Este concepto se basa en la idea de que todos los principios variacionales de la elasticidad que contengan el campo de desplazamientos \mathbf{u} se pueden describir mediante un funcional parametrizado. Escogiendo adecuadamente la parametrización se pueden obtener los distintos principios variacionales clásicos. Estos principios son de una gran generalidad y además de permitir la formulación de elementos mixtos, se pueden desarrollar principios variacionales parametrizados t-generalizados y d-generalizados para formular elementos híbridos.

- **Formulación EAS** (“Enhanced Assumed Strain”). Esta formulación parte del principio de Hu-Washizu y supone el campo de deformaciones descompuesto aditivamente en un campo de deformaciones compatible con los desplazamientos y en un campo de deformaciones “mejorado” formulado de manera independiente ([Simó y Rifai, 1990](#); [Simó y Armero, 1993](#)). Esta formulación engloba en el contexto de las deformaciones supuestas las de modos incompatibles ([Taylor et al., 1976](#); [Wilson et al., 1973](#)), y otras formulaciones de tensiones supuestas ([Pian y Sumihara, 1984](#)) que parten del principio de Hellinger-Reissner.

Otra formulación más reciente es la de los elementos “Mixed Enhanced Strain” ([Kasper y Taylor, 1997a](#); [Kasper y Taylor, 1997b](#)). Su formulación es similar a la formulación EAS pero difiere en la reparametrización de los campos independientes del funcional de Hu-Washizu, añadiendo una parte mixta y otra mejorada. La parte mixta reparametriza los campos de tensiones y de deformaciones. La parte mejorada reparametriza de forma adicional a la mixta el campo de deformaciones. La ortogonalidad entre los campos de tensiones y deformaciones se consigue expresando adecuadamente los modos mixtos y mejorados, sin estar impuesta a priori. De esta manera, la recuperación variacionalmente consistente del campo de tensiones es directa. En grandes deformaciones presenta la ventaja, frente a la formulación EAS, de que

con cuatro puntos de Gauss la matriz de rigidez elemental no queda subintegrada.

2.3. Elementos para deformaciones infinitesimales

En este apartado se analizan los aspectos relacionados con la formulación de los elementos mejorados en problemas de deformaciones infinitesimales (Simó y Rifai, 1990), y su implementación computacional. Se efectúa el análisis espectral de la matriz de rigidez, para problemas lineales, de manera analítica con un programa de matemática formal (Maple, 1991a). A continuación se estudia el enriquecimiento que los modos mejorados introducen en la cinemática del elemento. Por último se presentan varios ejemplos de validación.

2.3.1. Formulación de la elasticidad infinitesimal con el funcional de Hu-Washizu

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, abierto y suave, con frontera $\partial\Omega$. Se denominará \mathbf{b} a las fuerzas volumétricas, \mathbf{u} al campo de desplazamientos, $\boldsymbol{\sigma}$ al tensor de tensiones de Cauchy, $\boldsymbol{\varepsilon}$ al tensor de deformaciones infinitesimales y $W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ a la función de densidad de energía elástica. Sea $\partial_u\Omega \subset \partial\Omega$ la frontera de Ω con desplazamientos impuestos $\bar{\mathbf{u}}$:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{en } \partial_u\Omega, \quad (2.1)$$

y $\partial_t\Omega$ la frontera de Ω con tensiones impuestas $\bar{\mathbf{t}}$:

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \partial_t\Omega, \quad (2.2)$$

y tal que $\partial_u\Omega \cup \partial_t\Omega = \partial\Omega$ y $\partial_u\Omega \cap \partial_t\Omega = \emptyset$.

El principio variacional de Hu-Washizu (Washizu, 1982) establece que, de todos los campos de desplazamientos \mathbf{u} , deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ y tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ definidos en Ω , que verifican (2.1), la solución del problema de la elasticidad infinitesimal es aquella que hace estacionario el funcional siguiente:

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega} (W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^S \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\partial_t\Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (2.3)$$

donde $W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ es la función de densidad de energía interna.

Observación 2.3.1 Con el símbolo $\nabla^S[\cdot]$ se indicará la parte simétrica del operador gradiente aplicado al campo $[\cdot]$. Por ejemplo:

$$\nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

Observación 2.3.2 *El campo $\nabla^S \mathbf{u}$ es el campo de deformaciones compatible con el campo de desplazamientos \mathbf{u} . Esta formulación permite generalizar el campo de deformaciones independiente $\boldsymbol{\varepsilon}$ de forma que, en principio, conste de componentes adicionales a \mathbf{u} .*

Observación 2.3.3 *El criterio de notación que se empleará en este trabajo es el siguiente:*

- *El producto totalmente contraído de los tensores \mathbf{A} y \mathbf{B} se indica $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Por ejemplo, si A y B son tensores de segundo orden:*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} \quad (2.5)$$

y si son de primer orden:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i \quad (2.6)$$

suponiendo para las expresiones indiciales que los tensores están referidos a una base ortonormal.

- *La aplicación natural de un tensor de segundo orden \mathbf{A} sobre uno de primer orden \mathbf{B} para obtener un tensor de primer orden \mathbf{D} , se expresa con \mathbf{AB} :*

$$\mathbf{D} = \mathbf{AB} \Leftrightarrow D_i = A_{ij} B_j \quad (2.7)$$

La aplicación natural de un tensor de cuarto orden \mathbf{C} sobre uno de segundo \mathbf{B} para obtener otro tensor de segundo orden \mathbf{A} , se expresa igualmente:

$$\mathbf{A} = \mathbf{CB} \Leftrightarrow A_{ij} = C_{ijkl} B_{kl} \quad (2.8)$$

No obstante, cuando se crea necesario por motivos de claridad, se empleará la notación indicial siguiendo el convenio de Einstein (sumación de índices repetidos).

Se consideran los espacios de desplazamientos admisibles, deformaciones admisibles y tensiones admisibles, definidos respectivamente por:

$$\mathcal{V} = \{ \delta \mathbf{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_u \Omega \} \quad (2.9)$$

$$\mathcal{E} = \{ \delta \boldsymbol{\varepsilon} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{n_{\text{strs}}}) \} \quad (2.10)$$

$$\mathcal{S} = \{ \delta \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{n_{\text{strs}}}) \} \quad (2.11)$$

con $n_{\text{strs}} = n_{\text{dim}}(n_{\text{dim}} + 1)/2$ para elasticidad bi y tridimensional y $n_{\text{strs}} = 4$ para problemas axilsimétricos. Asimismo, $H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ y $L^2(\Omega, \mathbb{R}^{n_{\text{strs}}})$ son espacios de Sobolev (de grado 1 y orden 2) y Lebesgue, respectivamente (consultar apéndice C.6). Anulando la primera variación de $\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$:

$$\delta \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \forall (\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{E} \times \mathcal{S} \quad (2.12)$$

se obtienen las ecuaciones variacionales del problema:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^S \delta \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = 0 \quad (2.13)$$

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla^S \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega = 0 \quad (2.14)$$

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\sigma} \right) \, d\Omega = 0 \quad (2.15)$$

Dado que $(\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \boldsymbol{\sigma})$ son arbitrarios, las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema variacional son:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla^S \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.18)$$

$$\bar{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = 0 \quad \text{en } \partial_t \Omega \quad (2.19)$$

Observación 2.3.4 *El significado físico de estas ecuaciones es claro:*

- (2.16) es la ecuación de equilibrio
- (2.17) establece la igualdad entre el campo de deformaciones independiente $\boldsymbol{\varepsilon}$ y el campo de deformaciones compatible con los desplazamientos $\nabla^S \mathbf{u}$
- (2.18) identifica el campo independiente de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ con el que se deriva del potencial elástico $W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$
- (2.19) iguala la tensiones impuestas en $\partial_t \Omega$ con el vector tensión obtenido a partir del tensor de tensiones.

2.3.2. Formulación variacional modificada con campos de deformaciones mejoradas supuestas

El ingrediente básico de la formulación con deformaciones mejoradas supuestas es la descomposición aditiva del campo de deformaciones independiente en uno compatible con los desplazamientos y otro de “deformaciones mejoradas”:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\nabla^S \mathbf{u}}_{\text{compatible}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\text{mejorado}} \quad (2.20)$$

Las deformaciones admisibles definidas en (2.10) se reparametrizan de acuerdo con (2.20):

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \delta \mathbf{u} + \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}; \quad \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \tilde{\mathcal{E}} \quad (2.21)$$

siendo $\tilde{\mathcal{E}} \equiv \mathcal{E}$. Sustituyendo (2.20) en (2.3), se obtiene el funcional de Hu-Washizu reparametrizado con el campo de deformaciones mejoradas:

$$\Pi(\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega} (W(\mathbf{x}, \nabla^S \mathbf{u} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (2.22)$$

Anulando la primera variación:

$$\delta \Pi(\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \forall (\delta \mathbf{u}, \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \delta \boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{E}} \times \mathcal{S} \quad (2.23)$$

se obtienen las ecuaciones variacionales siguientes:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \nabla^S \delta \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \right) d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (2.24)$$

$$- \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega = 0 \quad (2.25)$$

$$\int_{\Omega} \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \left(\frac{\partial W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\sigma} \right) d\Omega = 0 \quad (2.26)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema variacional reparametrizado son las anteriormente expresadas (2.16;2.18;2.19) y además:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (2.27)$$

que reemplaza a (2.17)

Observación 2.3.5 La ecuación de compatibilidad (2.27) impone que, desde el punto de vista de la mecánica del continuo, para la solución exacta el campo de deformaciones mejoradas es nulo. Para la solución aproximada (problema discreto formulado mediante elementos finitos) en general se verifica: $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq \mathbf{0}$

2.3.3. Formulación del problema variacional mediante elementos finitos mixtos

La formulación variacional mediante elementos finitos se realiza discretizando el dominio Ω en n_{elm} elementos Ω^e , para obtener el dominio discretizado:

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \Omega^e \quad \Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset, \text{ si } i \neq j \quad (2.28)$$

El elemento Ω^e se transforma en un “cubo unitario” (Zienkiewicz y Taylor, 1989):

$$\square = \underbrace{[-1, 1] \times \cdots \times [-1, 1]}_{n_{\text{dim}}}$$

definido en el espacio isoparamétrico de coordenadas $\{\boldsymbol{\xi}\}$, mediante la transformación:

$$\boldsymbol{\phi} : \boldsymbol{\xi} \in \square \rightarrow \mathbf{x} \in \Omega^e; \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{A=1}^{n_{\text{nod}}^e} \mathbf{x}_A N_A(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.29)$$

donde \mathbf{x}_A son las coordenadas de los n_{nod}^e nodos del elemento e y $N_A(\boldsymbol{\xi})$ son las funciones de forma.

Los espacios \mathcal{V} , $\tilde{\mathcal{E}}$ y \mathcal{S} se aproximan mediante subespacios de dimensión finita $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$, $\tilde{\mathcal{E}}_h \subset \tilde{\mathcal{E}}$ y $\mathcal{S}_h \subset \mathcal{S}$:

$$\mathcal{V}_h = \left\{ \delta \mathbf{u}_h \in \mathcal{V} \mid \delta \mathbf{u}_h = 0; \delta \mathbf{u}_h = \sum_{A=1}^{n_{\text{nod}}} \delta \mathbf{u}_A N_A(\boldsymbol{\xi}); \quad \forall \mathbf{x} \in \partial_u \Omega \right\} \quad (2.30)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_h = \left\{ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_h \in \tilde{\mathcal{E}} \mid \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_h = \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(\boldsymbol{\xi}) \chi^e \right\} \quad (2.31)$$

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{S} \mid \boldsymbol{\sigma}_h = \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \boldsymbol{\sigma}_h^e(\boldsymbol{\xi}) \chi^e \right\} \quad (2.32)$$

siendo $\chi^e : \Omega^e \rightarrow \mathbb{R}$ la función característica de Ω^e definida como:

$$\chi^e = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^e \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.33)$$

El campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_h$ se elimina de la formulación de elementos finitos mediante un requisito de ortogonalidad impuesto en la propia definición de \mathcal{S}_h , de forma que se satisfaga directamente (2.25):

$$\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_h d\Omega = 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{S}_h \text{ y } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \tilde{\mathcal{E}}_h \quad (2.34)$$

Observación 2.3.6 *Al eliminar de la formulación el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_h$, las tensiones que se emplean en la formulación son las que se obtienen a partir de la función de energía interna:*

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.35)$$

Los dos campos de tensiones en general no coinciden en la solución aproximada: $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) \neq \boldsymbol{\sigma}_h$. Aunque a efectos de post-proceso se puede emplear $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon})$ (Armero, 1996b), es posible recuperar las tensiones $\boldsymbol{\sigma}_h$ de forma variacionalmente consistente (Simó y Rifaí, 1990).

Con la hipótesis de ortogonalidad (2.34) y los espacios de dimensión finita definidos en (2.30; 2.31), las ecuaciones variacionales del problema discreto aproximado son:

$$\int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \boldsymbol{\nabla}^S \delta \mathbf{u}_h - \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_h) d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u}_h d\Gamma = 0 \quad (2.36)$$

$$\int_{\Omega} \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_h \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega = 0 \quad (2.37)$$

Observación 2.3.7 *Al eliminar el campo independiente de tensiones, las ecuaciones variacionales (2.36; 2.37) quedan con un planteamiento en deformaciones, muy adecuado para integrar las ecuaciones de la plasticidad.*

2.3.4. Formulaci3n matricial

Las interpolaci3n de los campos de desplazamientos y deformaciones mejoradas se efectúa de la siguiente manera:

- Interpolaci3n del campo de desplazamientos. Se emplea una formulaci3n isoparamétrica que interpola los desplazamientos con la misma interpolaci3n que las coordenadas (2.29):

$$\mathbf{u}_h^e = \sum_{A=1}^{n_{\text{nod}}^e} \mathbf{d}_A^e N_A(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}^{eT} \mathbf{d}^e \quad (2.38)$$

siendo \mathbf{d}_A^e el vector de desplazamientos nodales del elemento e y \mathbf{N}^e la matriz de funciones de forma del elemento. Con la notaci3n estándar de elementos finitos¹, el campo de deformaciones compatible se interpola con la matriz \mathbf{B} . Derivando (2.38):

$$(\nabla^S \mathbf{u}_h^e)_{ij} = \frac{1}{2} (N_{A,i} d_{A,j} + N_{A,j} d_{A,i}) \Rightarrow \nabla^S \mathbf{u}_h^e = \mathbf{B} \mathbf{d}^e \quad (2.39)$$

Observaci3n 2.3.8 La interpolaci3n definida por (2.38), aunque se ha expresado a nivel de elemento, es conforme (el campo interpolado es continuo no existiendo saltos en los desplazamientos entre un elemento y otro).

- Interpolaci3n del campo de deformaciones mejorado. El campo de deformaciones mejoradas se interpola de acuerdo con la expresi3n:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_h^e = \mathbf{G} \boldsymbol{\alpha}^e \quad (2.40)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}^e$ son parámetros internos del elemento, y \mathbf{G} es una matriz de dimensi3n $n_{\text{strs}} \times n_{\text{enh}}$, siendo n_{enh} el número de modos mejorados del elemento.

Observaci3n 2.3.9 La expresi3n (2.40), de acuerdo con la definici3n (2.31), se formula a nivel de cada elemento por lo que no se le exige ningún tipo de continuidad entre los mismos. De hecho, en ciertas situaciones (2.40) puede interpretarse como la interpolaci3n de un campo de deformaciones asociado a un campo de desplazamientos no conforme (Simó y Rifaí, 1990).

Observaci3n 2.3.10 De acuerdo con las expresiones (2.20; 2.39; 2.40), el campo de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ se interpola a nivel de elemento mediante la expresi3n:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B} \mathbf{d}^e + \mathbf{G} \boldsymbol{\alpha}^e \quad (2.41)$$

¹ Para ganar claridad en la exposici3n se utilizará la notaci3n en que las tensiones y deformaciones se expresan en forma de vector. Por ejemplo en 2D: $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy})^T$

Sustituyendo las interpolaciones (2.38; 2.39; 2.40) en las ecuaciones variacionales (2.36; 2.37), resulta:

$$\mathbf{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left[\mathbf{f}^{e,\text{ext}} - \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega \right] = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{h}_{\text{enh}}^e \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega = \mathbf{0} \quad (2.43)$$

donde $\mathbf{A}[\cdot]$ es el operador de ensamblaje y $\mathbf{f}^{e,\text{ext}}$ es el vector de fuerzas externas convencional que se obtiene a partir de la expresión (2.36):

$$\mathbf{f}^{e,\text{ext}} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial_t \Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2.44)$$

Observación 2.3.11 Las ecuaciones (2.42; 2.43) están planteadas en forma residual, que es la adecuada para problemas no lineales.

En el caso de la elasticidad lineal, si denominamos \mathbf{C}^e a la matriz de módulos elásticos (o matriz constitutiva):

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{C}^e (\mathbf{B} \mathbf{d}^e + \mathbf{G} \boldsymbol{\alpha}^e) \quad (2.45)$$

las ecuaciones (2.42; 2.43) se expresan:

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left[\left(\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{d}^e + \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{G} d\Omega \right) \boldsymbol{\alpha}^e \right] = \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \mathbf{f}^{e,\text{ext}} \quad (2.46)$$

$$\left(\int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{d}^e + \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \mathbf{C}^e \mathbf{G} d\Omega \right) \boldsymbol{\alpha}^e = \mathbf{0} \quad (2.47)$$

2.3.5. Condiciones de convergencia

Para que la formulación descrita en los apartados anteriores converja a la solución exacta es necesario que se verifique:

1. Las columnas de la matriz \mathbf{G} han de ser linealmente independientes para que la matriz:

$$\mathbf{H}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \mathbf{C}^e \mathbf{G} d\Omega \quad (2.48)$$

sea invertible.

2. Para que el elemento pase la “Prueba de la Parcela” (Taylor et al., 1986) ha de representar de manera exacta los estados de tensión constante $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^e$, que se obtienen al imponer campos de desplazamientos lineales²

² Aquí se toma como referencia el trabajo de Taylor y coautores dado que en él se demuestra que esta prueba es una condición necesaria y suficiente para la convergencia. La “prueba de la parcela” o *condición de consistencia* desató una viva polémica desde principios de la década de los 70 hasta mediados de la década de los 80. Formalmente propuesta en (Irons y Razzaque, 1972; Strang y Fix, 1973), fue seriamente cuestionada en otros trabajos (Stummel, 1980) y vuelta a defender posteriormente (Irons y Loikkanen, 1983). Aparentemente, el artículo de Taylor et.al. ha zanjado esta larga polémica

Si el campo de desplazamientos es lineal, no existe contribución de los modos mejorados, resultando:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^e = \mathbf{C}^e \mathbf{B} \mathbf{d} = \text{constante} \quad (2.49)$$

Sustituyendo (2.49) en (2.37):

$$\left(\int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{d} = \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T d\Omega \right) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0^e = \mathbf{0} \quad (2.50)$$

Por tanto, para que se verifique la prueba de la parcela ha de cumplirse:

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T d\Omega = \mathbf{0} \quad (2.51)$$

3. Estabilidad. Para que el elemento no tenga modos de energía nula adicionales a los correspondientes a movimientos de sólido rígido, se impone:

$$\tilde{\mathcal{E}} \cap \nabla^S \mathcal{V} = \emptyset \quad (2.52)$$

es decir, los espacios de interpolación $\tilde{\mathcal{E}}$ y $\nabla^S \mathcal{V}$ son independientes. La interpretación práctica de esta restricción es que cualquier modo mejorado de deformación no debe coincidir con ningún modo de deformación compatible.

2.3.6. Diseño de elementos con campos de deformaciones mejoradas

En este apartado se analiza la metodología de diseño de elementos con deformaciones supuestas mejoradas. Dado que la idea clave de esta formulación es la reparametrización del campo de deformaciones, la discusión debe centrarse en la forma de construir la parte mejorada del mismo.

Para obtener la matriz \mathbf{G} de la expresión (2.40), que está definida en el elemento Ω^e , la interpolación del campo $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ se define previamente mediante un campo $\tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi})$ definido en el espacio isoparamétrico. Posteriormente, a partir de $\tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi})$ se obtiene $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ en el espacio euclídeo mediante la relación:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{j_0}{j(\boldsymbol{\xi})} \mathbf{J}_0^{-T} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{J}_0^{-1} \quad (2.53)$$

siendo \mathbf{J} el jacobiano de la transformación isoparamétrica definida en (2.29):

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \quad (2.54)$$

\mathbf{J}_0 es el valor de \mathbf{J} en el centroide del elemento, y $j(\boldsymbol{\xi})$ y j_0 son los determinantes de \mathbf{J} y \mathbf{J}_0 respectivamente.

Observación 2.3.12 Como se demuestra más adelante, el factor $j(\boldsymbol{\xi})/j_0$ en la definición de la transformación (2.53) es imprescindible para que se cumpla la prueba de la parcela

Observación 2.3.13 En la definición (2.53) se puede sustituir \mathbf{J}^{-T} por \mathbf{J} , aunque se obtiene un elemento con prestaciones ligeramente inferiores (Armero y Glaser, 1997)

A continuación se describe la sistemática de diseño de los elementos con deformaciones supuestas, particularizando las expresiones dadas para el caso de deformación plana. Dicha metodología consta de los siguientes pasos:

1. Definir en el espacio isoparamétrico una matriz de interpolación $\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi})$, tal que el campo de deformaciones mejoradas $\tilde{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi})$ tiene la expresión:

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_{11} \\ \tilde{E}_{22} \\ 2\tilde{E}_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha} \quad (2.55)$$

siendo $\dim(\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi})) = n_{\text{strs}} \times n_{\text{enh}}$

2. Obtener la expresión de la matriz $\mathbf{G}(\boldsymbol{\xi})$, que interpola el campo de deformaciones mejoradas $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ en el espacio euclídeo:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11} \\ \tilde{\varepsilon}_{22} \\ 2\tilde{\varepsilon}_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} \quad (2.56)$$

mediante la relación (2.53). Sustituyendo (2.55) en (2.53) y operando resulta:

$$\mathbf{G} = \frac{j_0}{j(\boldsymbol{\xi})} \mathbf{T}_0 \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.57)$$

donde:

$$\mathbf{T}_0 = \begin{pmatrix} J_{011}^2 & J_{021}^2 & J_{011}J_{021} \\ J_{012}^2 & J_{022}^2 & J_{012}J_{022} \\ 2J_{011}J_{012} & 2J_{021}J_{022} & J_{011}J_{022} + J_{012}J_{021} \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.58)$$

Observación 2.3.14 La matriz $\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi})$ ha de construirse de modo que verifique:

$$\int_{\square} \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad (2.59)$$

para que el elemento pase la prueba de la parcela. Esta condición se obtiene a partir de (2.51):

$$\int_{\Omega} \mathbf{G} d\Omega = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \int_{\square} \frac{j_0}{j(\boldsymbol{\xi})} \mathbf{T}_0 \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}) j(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \int_{\square} \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \quad (2.60)$$

Ejemplos

Con la metodología de diseño descrita, la formulación de los elementos de deformaciones supuestas queda descrita con la matriz $\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi})$. A continuación se describen tres tipos de elementos que serán analizados posteriormente³:

- **Elemento $Q1/E4$**

Es un elemento de cuatro nodos con interpolación bilineal del campo de desplazamientos y con cuatro modos de deformaciones mejoradas. Se define mediante la matriz:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

Equivale al elemento de Wilson-Taylor ([Taylor et al., 1976](#)) que se formuló en el contexto de los denominados “modos incompatibles”.

Observación 2.3.15 *El elemento de modos incompatibles original ([Wilson et al., 1973](#)), sólo pasaba la prueba de la parcela cuando tenía forma de paralelogramo. Dicho elemento, en el contexto de la formulación que nos ocupa, queda definido por la matriz:*

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta \\ 0 & 0 & \xi & \eta & \xi^2 & \eta^2 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

y, como es inmediato de comprobar, no verifica la condición (2.60)

- **Elemento $Q1/E5$**

Este elemento ([Simó y Rifai, 1990](#)) se obtiene restando las dos últimas columnas de (2.62):

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta \\ 0 & \eta & 0 & 0 & -\xi\eta \\ 0 & 0 & \xi & \eta & \xi^2 - \eta^2 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Este elemento pasa la prueba de la parcela y tiene un comportamiento ligeramente mejor que el $Q1/E4$ cuando los elementos están distorsionados.

- **Elemento $Q1/E7$**

Este elemento ([Andelfinger et al., 1992](#)) tiene siete modos de deformaciones mejoradas, y queda definido por la siguiente matriz:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & \xi\eta \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

³ La denominación $Q1/En$ proviene de cuadrilátero lineal ($Q1$) con n modos adicionales de deformaciones supuestas (“enhanced”)

Es equivalente al propuesto por (Pian y Sumihara, 1984), a partir del principio variacional de Hellinger. Desde el punto de vista de la plasticidad computacional, la ventaja de la formulación en deformaciones supuestas frente a la de Pian, es que la variable básica es la deformación en vez de la tensión.

2.3.7. Implementación numérica

Para resolver iterativamente el sistema de ecuaciones no lineales expresado en (2.42; 2.43), el vector elemental de fuerzas internas $\mathbf{f}^{e,int}$ y el vector \mathbf{h}_{enh}^e se desarrollan en serie y se linealizan. Las expresiones en la iteración k son:

$$\widehat{\mathbf{f}}^{e,int} = \mathbf{f}^{e,int(k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{e,int}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right|^{(k)} \Delta \boldsymbol{\alpha}^{e(k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{e,int}}{\partial \mathbf{d}} \right|^{(k)} \Delta \mathbf{d}^{e(k)} \quad (2.65)$$

$$\widehat{\mathbf{h}}^{e,enh} = \mathbf{h}^{e,(k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right|^{(k)} \Delta \boldsymbol{\alpha}^{e(k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial \mathbf{d}} \right|^{(k)} \Delta \mathbf{d}^{e(k)} \quad (2.66)$$

Llamando $\mathbf{C}^{e(k)}$ a la matriz tangente de módulos elásticos:

$$\mathbf{C}^{e(k)} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{d}^{e(k)} + \mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}^{e(k)})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.67)$$

las expresiones desarrolladas de las matrices tangentes que aparecen en las expresiones linealizadas (2.65; 2.66) son:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}^{e,int}}{\partial \mathbf{d}} \right|^{(k)} = \mathbf{K}^{e,(k)} = \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{e(k)} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.68)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}^{e,int}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right|^{(k)} = (\boldsymbol{\Gamma}^{e,(k)})^T = \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{e(k)} \mathbf{G} d\Omega \quad (2.69)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial \mathbf{d}} \right|^{(k)} = \boldsymbol{\Gamma}^{e,(k)} = \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{G}^T \mathbf{C}^{e(k)} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.70)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right|^{(k)} = \mathbf{H}^{e,(k)} = \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{G}^T \mathbf{C}^{e(k)} \mathbf{G} d\Omega \quad (2.71)$$

La ecuación (2.43) está planteada a nivel local de cada elemento y por tanto es posible sustituir (2.70; 2.71) en (2.66) e igualar directamente a cero sin necesidad de ensamblar:

$$\mathbf{h}^{e(k)} + \mathbf{H}^{e(k)} \Delta \boldsymbol{\alpha}^{e(k)} + \boldsymbol{\Gamma}^{e(k)} \Delta \mathbf{d}^{e(k)} = \mathbf{0} \quad (2.72)$$

A continuación se condensa estáticamente $\Delta \boldsymbol{\alpha}^{e(k)}$ en (2.72), y se sustituye en (2.65), obteniéndose el vector de fuerzas internas linealizado:

$$\widehat{\mathbf{f}}^{e,int} = \mathbf{f}^{e,int(k)} - (\boldsymbol{\Gamma}^{e,(k)})^T (\mathbf{H}^{e(k)})^{-1} \left(\boldsymbol{\Gamma}^{e,(k)} \Delta \mathbf{d}^{e(k)} + \mathbf{h}^{e,(k)} \right) + \mathbf{K}^{e,(k)} \Delta \mathbf{d}^{e(k)} \quad (2.73)$$

y planteando que la diferencia entre los vectores globales de fuerzas internas y de fuerzas externas es cero:

$$\mathbf{0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left[\mathbf{f}^{e,\text{ext}} - \hat{\mathbf{f}}^{e,\text{int}} \right] \quad (2.74)$$

resulta el proceso iterativo que se muestra en el Cuadro [2.1](#)

Conocida la solución en la iteración k :

1. Calcular el valor de $\mathbf{h}^{e(k)}$

$$\mathbf{h}^{e(k)} = \int_{\Omega^e} \mathbf{G}^T \frac{\partial W(\mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{d}^{e(k)} + \mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}^{e(k)})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega$$

2. Obtener $\boldsymbol{\Gamma}^{e(k)}$ y $\mathbf{H}^{e(k)}$ de acuerdo con las expresiones (2.70; 2.71)
3. Obtener mediante “condensación estática” $\Delta\boldsymbol{\alpha}^{e(k)}$

$$\Delta\boldsymbol{\alpha}^{e(k)} = -\left(\mathbf{H}^{e(k)}\right)^{-1} \left[\boldsymbol{\Gamma}^{e(k)} \Delta\mathbf{d}^{e(k)} + \mathbf{h}^{e(k)}\right]$$

4. Actualizar $\boldsymbol{\alpha}^{e(k+1)}$

$$\boldsymbol{\alpha}^{e(k+1)} = \boldsymbol{\alpha}^{e(k)} + \Delta\boldsymbol{\alpha}^{e(k)}$$

5. Calcular $\tilde{\mathbf{f}}^{e,\text{int}(k)}$ y $\tilde{\mathbf{K}}^{e(k)}$ mediante:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}^{e,\text{int}(k)} &= \mathbf{f}^{e,\text{int}(k)} - \boldsymbol{\Gamma}^{e(k)T} \left(\mathbf{H}^{e(k)}\right)^{-1} \mathbf{h}^{e(k)} \\ \tilde{\mathbf{K}}^{e(k)} &= \mathbf{K}^{e(k)} - \boldsymbol{\Gamma}^{e(k)T} \left(\mathbf{H}^{e(k)}\right)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}^{e(k)} \end{aligned}$$

6. Ensamblar y resolver el nuevo sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}^{(k)} &= \mathbf{A} \left[\mathbf{f}^{e,\text{ext}} - \tilde{\mathbf{f}}^{e,\text{int}(k)} \right] \\ \tilde{\mathbf{K}}^{(k)} &= \mathbf{A} \tilde{\mathbf{K}}^{e(k)} \\ \tilde{\mathbf{K}}^{(k)} \Delta\mathbf{d}^{(k)} &= \tilde{\mathbf{R}}^{(k)} \end{aligned}$$

7. Una vez calculado $\Delta\mathbf{d}^{(k)}$, actualizar el vector de desplazamientos

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{d}^{(k)} + \Delta\mathbf{d}^{(k)}$$

8. Chequear la convergencia

- Si $\|\tilde{\mathbf{R}}^{(k)}\| > \text{TOL}$ hacer $k \rightarrow k+1$ e ir al paso 1
- Si $\|\tilde{\mathbf{R}}^{(k)}\| \leq \text{TOL}$ comenzar un nuevo paso de carga

Cuadro 2.1: *Algoritmo de solución*

2.3.8. Análisis espectral

El análisis espectral de la matriz de rigidez elemental permite conocer la respuesta del elemento en diversas situaciones: cumplimiento de la prueba de la parcela, modos de energía nula, comportamiento en régimen incompresible, comportamiento en flexión, etc. En este apartado se hace el análisis de autovalores de los siguientes elementos de cuatro nodos (Hughes, 1987):

1. Elemento bilineal $Q4$

2. Elemento con integración reducida $Q4R$
3. Elemento con integración reducida-selectiva $Q4RS$
4. Elemento con formulación $\overline{\mathbf{B}}$
5. Elementos con deformaciones mejoradas supuestas $Q1/E4$, $Q1/E5$ y $Q1/E7$

Observación 2.3.16 *Para los elementos de deformaciones supuestas la matriz de rigidez elemental se obtiene mediante condensación estática para $n_{elm} = 1$ en las ecuaciones (2.46; 2.47), resultando:*

$$\tilde{\mathbf{K}}^e = \mathbf{K}^e - \mathbf{\Gamma}^{e^T} (\mathbf{H}^e)^{-1} \mathbf{\Gamma}^e \quad (2.75)$$

Se considera un elemento rectangular de base b y altura h , definiéndose a efectos de la discusión de resultados un parámetro de esbeltez $r = h/b$. El material es elástico lineal, estando definido mediante los coeficientes de Lamé λ y μ . El análisis de autovalores se ha efectuado de manera analíticamente exacta con un programa de álgebra formal (Maple, 1991a; Maple, 1991b). Los autovectores obtenidos de la matriz de rigidez se muestran en la figura 2.1, siendo los mismos para todos los elementos.

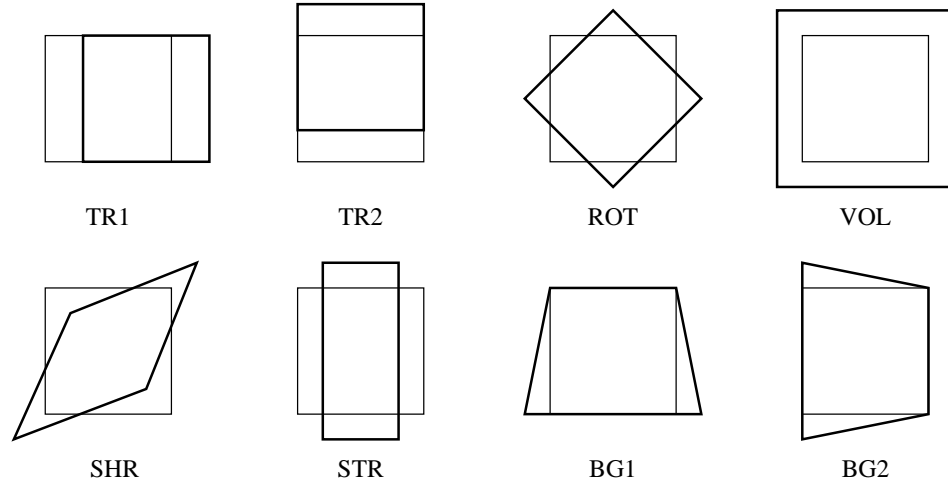


Figura 2.1: Autovectores de la matriz de rigidez elemental

Del análisis de autovalores se extraen las siguientes conclusiones:

1. Los autovalores asociados a movimientos de sólido rígido (TR1, TR2 y ROT), y de deformación constante (VOL, SHR y STR) son idénticos

para todos los elementos y valen:

$$\lambda_{\text{TR1}} = 0$$

$$\lambda_{\text{TR2}} = 0$$

$$\lambda_{\text{ROT}} = 0$$

$$\lambda_{\text{VOL}} = \frac{1}{2r} \left[(\lambda + 2\mu)(1 + r^2) + \sqrt{4\mu(\lambda + \mu)(r^2 - 1)^2 + \lambda^2(r^2 + 1)^2} \right]$$

$$\lambda_{\text{SHR}} = \mu \left(r + \frac{1}{r} \right)$$

$$\lambda_{\text{STR}} = \frac{1}{2r} \left[(\lambda + 2\mu)(1 + r^2) - \sqrt{4\mu(\lambda + \mu)(r^2 - 1)^2 + \lambda^2(r^2 + 1)^2} \right]$$

Este resultado era de esperar, ya que de acuerdo con la prueba de la parcela, estos modos de deformación deben ser capturados de manera exacta por todos los elementos considerados. Por tanto, la expresión de dichos autovalores debe ser independiente de la formulación empleada.

2. Las prestaciones de las distintas formulaciones de elementos están caracterizadas por los autovalores asociados a los modos de flexión (BG1 y BG2).
3. La expresión de los autovalores de los modos de flexión se muestra en el cuadro 2.2

	BG1	BG2
$Q4$	$(\mu + (\lambda + 2\mu)r^2)/3r$	$(\mu r^2 + \lambda + 2\mu)/3r$
$Q4R$	0	0
$Q4RS$	$\mu(2r^2 + 1)/3r$	$\mu(r^2 + 2)/3r$
$\bar{\mathbf{B}}$	$(9\mu + r^2(\lambda + 10\mu))/27r$	$(9r^2\mu + (\lambda + 10\mu))/27r$
$Q1/E4$	$4r\mu(\lambda + \mu)/3(\lambda + 2\mu)$	$4\mu(\lambda + \mu)/3r(\lambda + 2\mu)$

Cuadro 2.2: Autovalores asociados a los modos de flexión

y su interpretación permite extraer las siguientes conclusiones:

- El elemento de integración reducida $Q4R$ tiene dos modos de energía nula adicionales a los de movimiento de sólido rígido. En consecuencia, con este elemento aparece el fenómeno de “hour-glassing” (modos de deformación con energía nula que ocasionan deformaciones espúreas de la malla) que invalida los resultados obtenidos.
- En régimen incompresible ($\lambda \rightarrow \infty$), los autovalores de flexión tienden a infinito para todos los elementos excepto los formulados con integración selectiva y con deformaciones mejoradas supuestas. Este hecho supone que en problemas de elasticidad cuasi

incompresible o de plasticidad con flujo plástico incompresible, el elemento se bloquea.

Observación 2.3.17 *El elemento $\overline{\mathbf{B}}$ que se ha formulado sólo descompone aditivamente la matriz \mathbf{B} en la parte volumétrica particularizada en el centroide más la parte desviadora. Existen otras formulaciones del elemento que mejoran sus prestaciones ([Nagtegaal et al., 1974](#)).*

- En problemas de flexión de vigas delgadas ($r \rightarrow 0$ para el modo BG1, o $r \rightarrow \infty$ para BG2), todos los elementos se bloquean salvo los formulados con deformaciones supuestas.
- A partir de las matrices de rigidez calculadas analíticamente ([Maple, 1991a](#)) para los elementos mejorados $Q1/E4$, $Q1/E5$ y $Q1/E7$, se concluye que las formulaciones de estas tres familias son completamente equivalentes cuando el elemento tienen forma de paralelogramo.

2.3.9. Cinemática de los elementos con deformaciones mejoradas supuestas

En este apartado se analiza el enriquecimiento que proporcionan los modos mejorados a la cinemática del elemento. Un elemento compatible (con formulación en desplazamientos) tiene cinco modos de deformación, además de los tres correspondientes a los movimientos de sólido rígido, que expresados con la notación vectorial de (2.55), son:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{VOL}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{SHR}}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{STR}}, \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \\ \xi \end{pmatrix}_{\text{BG1}}, \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}_{\text{BG2}} \right\} \in \nabla^S \mathcal{V}_h \quad (2.76)$$

La bajas prestaciones de estos elementos en flexión y en régimen incompresible se justifican con los dos últimos modos del espacio $\nabla^S \mathcal{V}_h$ que corresponden a los modos de flexión BG1 y BG2, respectivamente. La componente ξ en BG1 introduce una deformación de corte parásita cuando el elemento se excita en flexión pura (al igual que la componente η en BG2), que sería deseable eliminar.

Los modos de deformación adicionales en el elemento $Q1/E4$ son:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \eta \end{pmatrix} \right\} \in \tilde{\mathcal{E}}_h \quad (2.77)$$

La contribución cinemática de estos modos se puede interpretar de la siguiente manera:

- Los dos últimos modos de (2.77), al activarse, permiten que se cancelan los términos parásitos de los modos $BG1$ y $BG2$ compatibles en (2.76).
- Los modos 1 y 2 de (2.77) se activan únicamente para modificar los modos de flexión compatibles, cuando el elemento no tiene los lados paralelos.

Observación 2.3.18 *Como se ha referido en el apartado anterior, los modos mejorados no deben variar los modos compatibles que recogen de manera exacta los estados de deformación constante.*

Observación 2.3.19 *Los modos adicionales a los del elemento $Q1/E4$ que tienen los elementos $Q1/E5$ y $Q1/E7$ sólo se activan cuando los elementos no tienen los lados paralelos.*

2.3.10. Ejemplos

Los elementos descritos se han desarrollado e implementado en el programa de elementos finitos FEAP (Taylor, 1999), con el cual se obtienen los resultados que se muestran a continuación.

Sensibilidad a la distorsión

En este ejemplo se analiza el problema de una ménsula elástica esbelta con una carga puntual en el extremo. Las dimensiones, propiedades del material, condiciones de contorno y acciones se muestran en la figura 2.2.

El objeto de este ejemplo es analizar la calidad de los resultados que se obtienen con los elementos con deformaciones supuestas mejoradas en problemas de flexión, y estudiar la sensibilidad a la distorsión de los mismos. Para ello, estos resultados se comparan con la solución teórica en la hipótesis de viga delgada y con los obtenidos con otras formulaciones: es conocido que para este caso (dominado por la flexión) la solución con elementos de continuo compatibles es muy pobre.

La ménsula considerada se discretiza en 8×1 elementos que se distorsionan de forma simétrica y asimétrica según el parámetro θ (figura 2.2).

Los resultados obtenidos para la flecha en el extremo se normalizan respecto de la solución teórica obtenida con las hipótesis de la Resistencia de Materiales:

$$f = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{4P}{E} \left(\frac{l}{d} \right)^3$$

En el cuadro (2.3) se muestran los resultados obtenidos para elementos con formulación $Q4, \bar{B}$ y $Q1/E4$, con distorsión simétrica. En el cuadro 2.4 se muestran los resultados para los elementos $Q4, \bar{B}, Q1/E4, Q1/E5$ y $Q1/E7$ con distorsión asimétrica. La razón de incluir en el primer caso únicamente los elementos mejorados $Q1/E4$ es que al tener los lados paralelos, las formulaciones $Q1/E5$ y $Q1/E7$ son idénticas a la $Q1/E4$ (ver apartado 2.3.8).

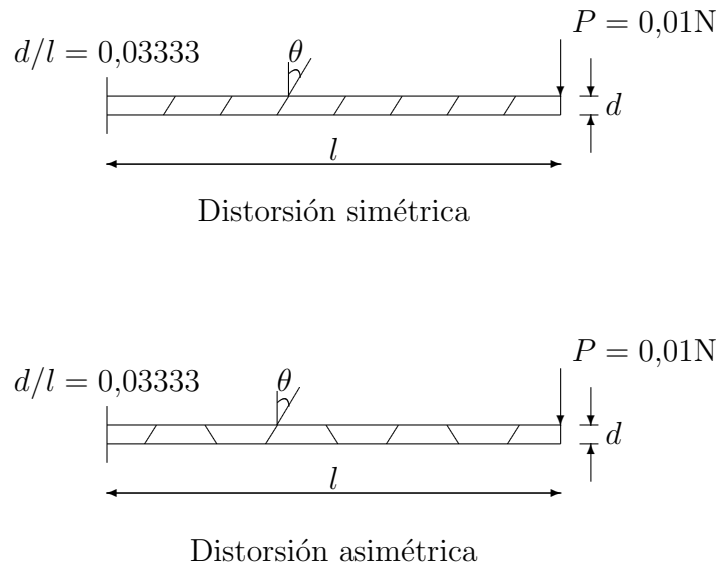


Figura 2.2: Ménsula elástica con carga puntual en el extremo

A la vista de estos resultados se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. Para elementos rectangulares (distorsión nula) el resultado obtenido con los elementos mejorados es muy próximo a la solución exacta (se obtiene un error del 0.33 % en desplazamientos).

Con esta familia de elementos se obtiene la solución exacta en problemas de flexión pura. En este caso hay un ligero error dado que la flexión no es uniforme (el momento flector varía linealmente a lo largo de la directriz y la solución de Resistencia de Materiales no considera deformación por cortante).

2. Según se distorsionan los elementos, la calidad de la solución disminuye. Esta pérdida de calidad es importante cuando la geometría de los elementos es trapezoidal. En cualquier caso, la solución obtenida con los elementos mejorados es mucho más exacta que la obtenida con los elementos convencionales.
3. Para elementos con geometría trapezoidal, según aumenta la distorsión se obtienen resultados muy parecidos con los elementos $Q1/E4$, $Q1/E5$ y $Q1/E7$ (aunque hay una ligerísima mejora, poco significativa, con los elementos con mayor número de modos mejorados).

Ensayo de Identación de Prandtl

En este ejemplo se analiza el comportamiento de los elementos con formulación de deformaciones supuestas mejoradas frente a los formulados en desplazamientos, en un problema de flujo plástico no contenido.

θ	$Q4$	\bar{B}	$Q1/E4$
0°	0,12458	0,12995	0,99664
15°	0,11080	0,11935	0,96783
30°	0,08022	0,09275	0,91632
45°	0,04985	0,06101	0,88451

Cuadro 2.3: *Sensibilidad a la distorsión. Resultados con distorsión simétrica*

θ	$Q4$	\bar{B}	$Q1/E4$	$Q1/E5$	$Q1/E7$
0°	0,12458	0,12995	0,99664	0,99664	0,99664
15°	0,09959	0,10467	0,45105	0,45107	0,45107
30°	0,06148	0,06563	0,26135	0,26143	0,26145
45°	0,03627	0,03906	0,19824	0,19845	0,19849

Cuadro 2.4: *Sensibilidad a la distorsión. Resultados con distorsión asimétrica*

Un cuerpo semi-infinito se identifica con un punzón rígido, con fricción infinita, en condiciones de deformación plana. En este problema, resuelto analíticamente (Prandtl, 1920) mediante la teoría de líneas de deslizamiento, se obtiene una presión de colapso constante e igual a $\sigma_{\text{lim}} = (2 + \pi)\sigma_Y/\sqrt{3}$ donde σ_Y es la tensión de fluencia en el modelo de Von-Mises (ver apéndice A).

El problema se ha modelizado numéricamente con una porción rectangular finita de altura $H = 10$ y longitud $L = 15$, discretizada con una malla muy gruesa de 5×5 elementos como se indica en la figura 2.3. Las propiedades mecánicas son las de un material de Von-Mises con plasticidad perfecta, siendo:

$$E = 10000, \quad \nu = 0,3, \quad \sigma_Y = 10$$

El análisis se ha llevado a cabo controlando los desplazamientos de los dos nodos de la parte superior derecha, para $0 \leq \frac{E\delta}{\sigma_Y H} \leq 20$ siendo δ el desplazamiento aplicado. En la figura 2.4 se recogen las curvas fuerza-desplazamiento obtenidas con las formulaciones en desplazamientos y con deformaciones supuestas mejoradas. Así mismo, se representa el valor de la fuerza límite obtenida analíticamente: $F_{\text{lim}} = 89,1$, suponiendo la anchura del punzón igual a la anchura de un elemento.

Los resultados obtenidos muestran que con los elementos formulados en desplazamientos no se llega a una carga límite, dado que el valor de la fuerza aumenta indefinidamente. Este elemento experimenta un bloqueo numérico artificial para flujo incompresible, como es el caso de la plasticidad de Von Mises. Sin embargo, con el elemento formulado con deformaciones supuestas se alcanza una rama horizontal en la curva fuerza-desplazamiento. La diferencia entre el valor teórico y el valor calculado de la carga límite, se explica porque no se puede reproducir la cinemática con la que se calcula la solución

analítica (en que únicamente desciende la superficie del sólido en contacto con el punzón y la malla es muy gruesa).

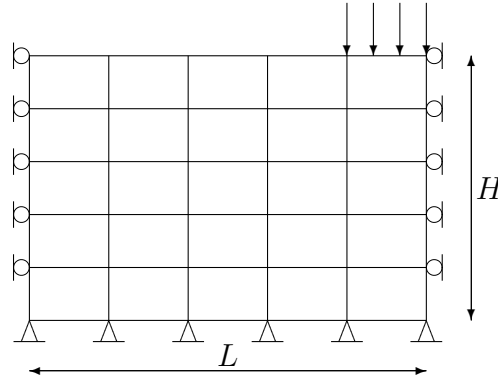


Figura 2.3: *Ensayo de Identación de Prandtl: modelo de elementos finitos*

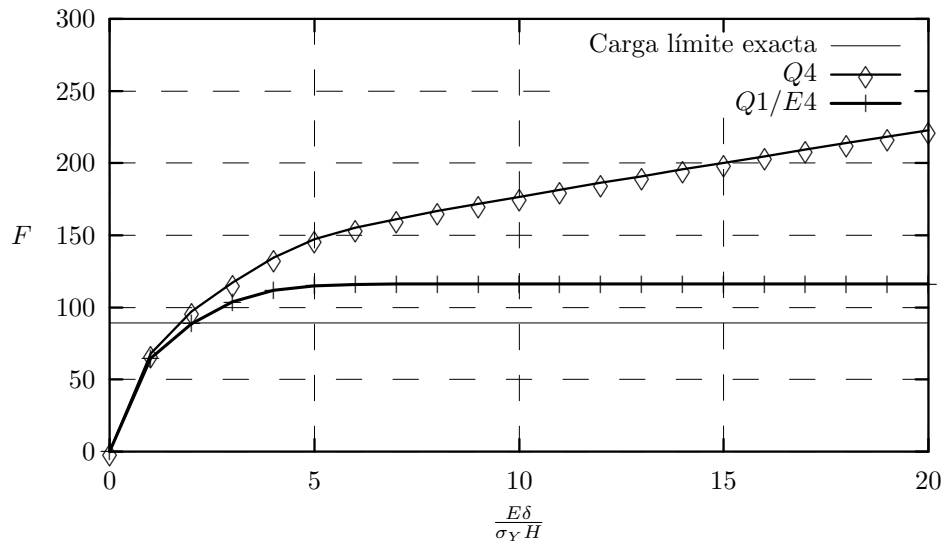


Figura 2.4: *Ensayo de Identación de Prandtl: curva Fuerza-Desplazamiento*

Problema de la membrana de Cook

En este ejemplo, analizado por otros autores (Simó y Rifai, 1990), se comparan los elementos formulados con deformaciones supuestas mejoradas con la formulación \bar{B} , en problemas de flexión elastoplástica. Se considera un panel de canto variable, empotrado en un extremo y sometido a esfuerzo cortante en el otro, como se muestra en la figura 2.5. La versión elástica de este problema es conocida como “problema de la membrana de Cook”.

El análisis por elementos finitos se realiza con control de fuerzas con $0 \leq F \leq 1,8$. El material modelizado es elastoplástico J_2 (Von Mises) con endurecimiento lineal isotrópico y cinemático. Las propiedades son:

$$E = 70 \quad \nu = \frac{1}{3} \quad H_{\text{iso}} = 0,135 \quad H_{\text{kin}} = 0,015$$

siendo H_{iso} y H_{kin} los módulos de endurecimiento isotrópico y cinemático, respectivamente, en estado uniaxial de carga. El panel se ha discretizado con las mallas de elementos finitos de la figura 2.6 suponiendo deformación plana.

En la figura 2.7 se muestra el desplazamiento final del extremo superior obtenido para las diferentes mallas. La formulación \bar{B} tiende a converger a la misma solución que las formulaciones con deformaciones supuestas, pero empleando un número de elementos mucho mayor. La formulación de deformaciones supuestas converge prácticamente con una malla de 8×8 elementos, mientras que con la formulación \bar{B} se obtiene un error aproximado del 5 % con la malla de 64×64 elementos. En consecuencia, la formulación de deformaciones supuestas mejoradas frente a la \bar{B} es menos sensible a la distorsión y da resultados más precisos con mallas menos refinadas.

Los resultados obtenidos con los elementos $Q1/E4$, $Q1/E5$ y $Q1/E7$ son similares, aunque se observa una ligera mejora en la convergencia según se aumenta el número de modos mejorados.

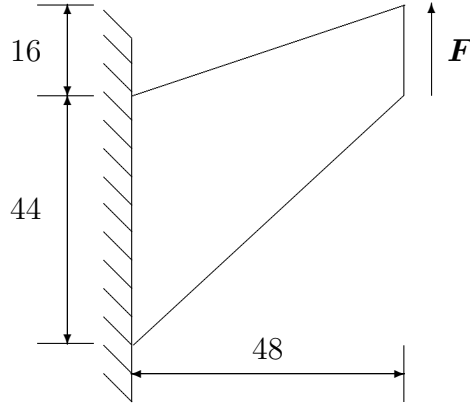


Figura 2.5: *Problema de la membrana de Cook: dimensiones, condiciones de contorno y acciones.*

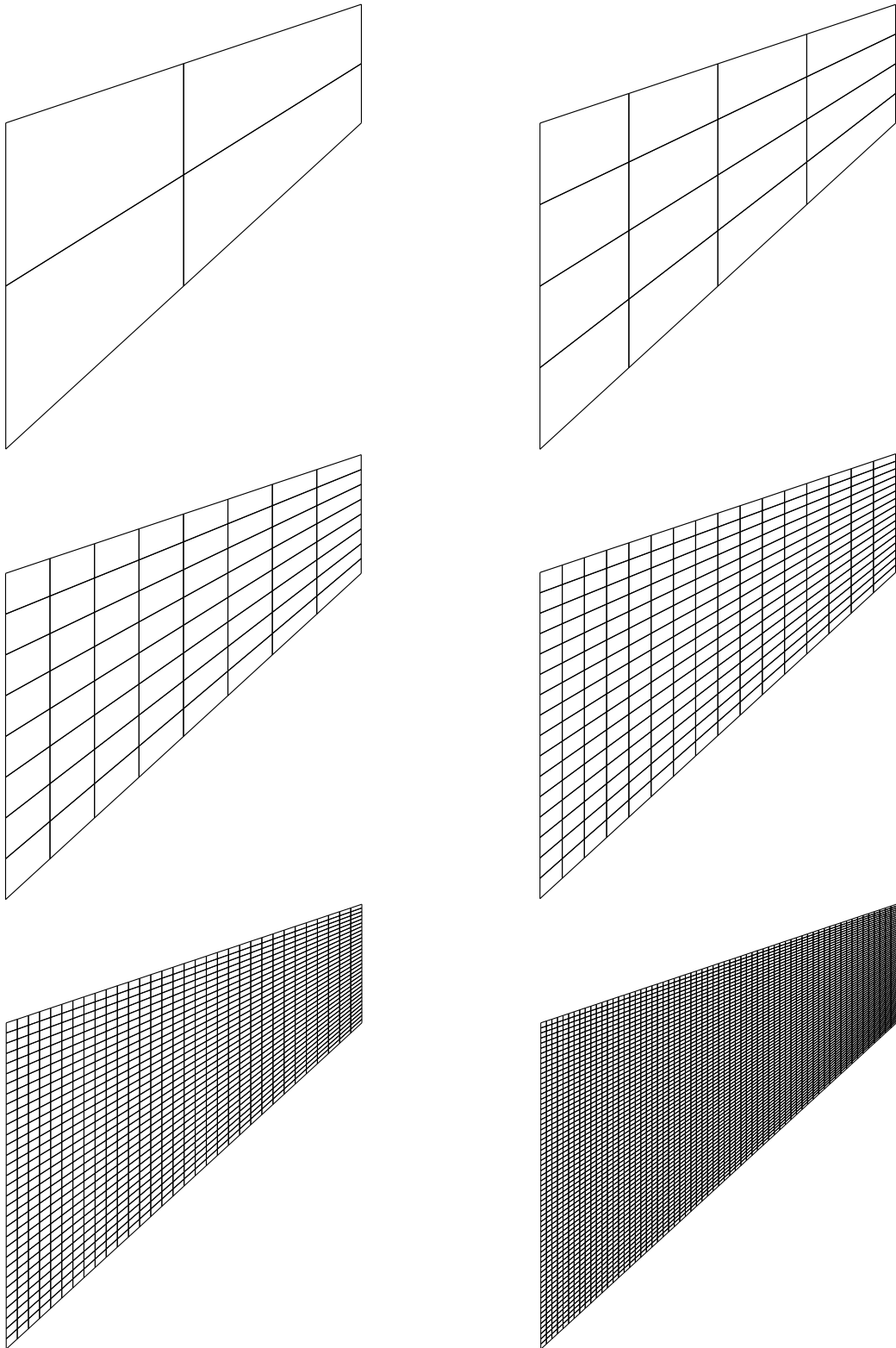


Figura 2.6: *Membrana de Cook elastoplástica: mallas de elementos finitos empleadas (4, 16, 64, 256, 1024 y 4096 elementos)*

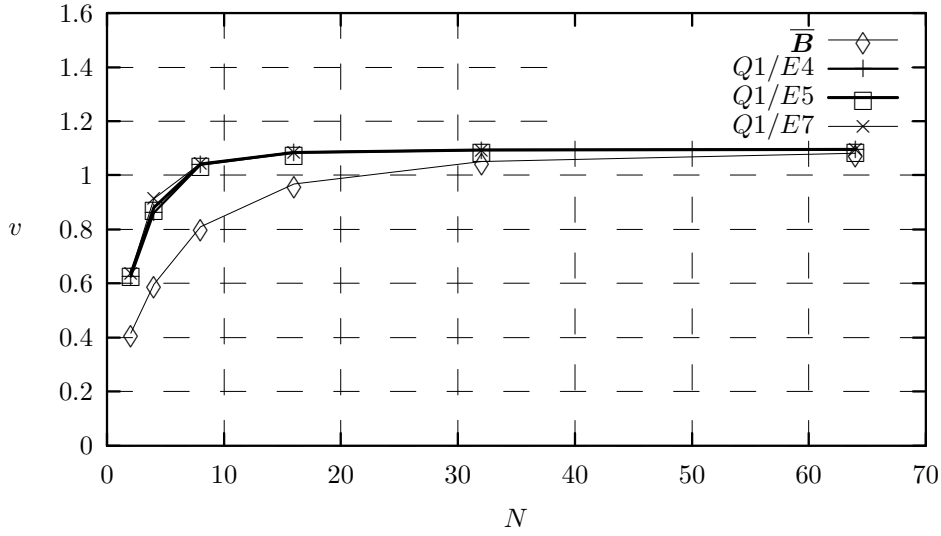


Figura 2.7: *Problema de la membrana de Cook. Desplazamiento de la esquina superior (v) frente al número de elementos por lado (n)*

2.4. Elementos para grandes deformaciones

Una vez analizada la formulación de los elementos mejorados con deformaciones infinitesimales, ésta se generaliza para grandes deformaciones. El esquema seguido es similar al del apartado anterior: formulación e implementación computacional (Simó y Armero, 1993; Simó et al., 1993a; Armero y Glaser, 1997) y análisis de las prestaciones de los elementos en ejemplos con grandes deformaciones.

2.4.1. Formulación de la elasticidad finita con el funcional de Hu-Washizu

En este apartado se detalla la formulación variacional del problema de la elasticidad finita.

Sea $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, abierto y suave, con frontera $\partial\Omega_0$, ocupado por un sólido \mathcal{S} en el instante $t = 0$. Sea $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$ el dominio que ocupa en el instante genérico t . Los puntos de Ω_0 se definen mediante el vector $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$, y los puntos de Ω_t mediante $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Observación 2.4.1 *En lo sucesivo Ω_0 se denominará configuración material o configuración de referencia, indistintamente. De la misma manera Ω_t será la configuración espacial o configuración actual.*

Se hace la hipótesis de que existe una función deformación $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ que relaciona ambas configuraciones de tal manera que a cada punto \mathbf{X} de

la configuración material le corresponde un punto de la configuración de referencia:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) \quad (2.78)$$

Observación 2.4.2 Se define asimismo el tensor de segundo orden gradiente de deformación como:

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\varphi} \quad \text{y en componentes: } F_J^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \quad (2.79)$$

La función de deformación $\boldsymbol{\varphi}$ cumple las siguientes propiedades:

1. Es unívoca:

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \exists ! \mathbf{X} \mid \mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$$

Con este requisito se evita que el sólido \mathcal{S} penetre en sí mismo

2. $\det(\nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\varphi}) \neq 0$, con objeto de evitar que a volúmenes no nulos de Ω_0 le correspondan volúmenes nulos en Ω_t

Llamaremos $\partial_{\varphi} \Omega_0$ al contorno de Ω_0 con condiciones esenciales $\boldsymbol{\varphi} = \bar{\boldsymbol{\varphi}}$ y $\partial_T \Omega_0$ al contorno de Ω_0 que tiene condiciones naturales $\bar{\mathbf{T}} : \partial_T \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, de modo que se verifica $\partial_{\varphi} \Omega_0 \cap \partial_T \Omega_0 = \emptyset$ y $\partial_{\varphi} \Omega_0 \cup \partial_T \Omega_0 = \partial \Omega_0$

El comportamiento constitutivo elástico se supone caracterizado en cada punto del sólido \mathbf{X} por una función de densidad de energía almacenada $W(\mathbf{X}, \mathbf{F})$.

Observación 2.4.3 Para que $W(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ sea invariante frente a las rotaciones de sólido rígido, se debe poder expresar como función del tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} , definido en (B.22):

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \widehat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) \quad \forall \mathbf{F} \quad (2.80)$$

La justificación de (2.80) se hace en el apartado 3.3.1.

Asimismo, supondremos el sólido cargado con fuerzas por unidad de volumen: $\mathbf{B} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$

Para las funciones de deformación:

$$\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{U} = \{ \boldsymbol{\varphi} : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t \mid \boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega_0, \mathbb{R}^n), \boldsymbol{\varphi} = \bar{\boldsymbol{\varphi}} \text{ en } \partial_{\varphi} \Omega_0 \} \quad (2.81)$$

donde H^1 es el espacio funcional de Sobolev de derivadas primeras con cuadrado integrable (ver apéndice C), el principio de Hu-Washizu (Washizu, 1982) establece que la solución del problema de contorno de la elasticidad con deformaciones finitas hace que tome un valor estacionario el funcional:

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{F}, \mathbf{P}) = & \int_{\Omega_0} (W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) + \mathbf{P} \cdot (\nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{F})) d\Omega - \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{B} d\Omega \\ & - \int_{\partial_T \Omega_0} \boldsymbol{\varphi} \cdot \bar{\mathbf{T}} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.82)$$

siendo \mathbf{P} el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff (ver Apéndice B).

Sean los espacios:

$$\mathcal{U}_0 = \{ \delta \boldsymbol{\varphi} : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t \mid \delta \boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega_0, \mathbb{R}^n), \delta \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \text{ en } \partial_\varphi \Omega_0 \} \quad (2.83)$$

$$\mathcal{F} = \{ \mathbf{F} \in L^2(\Omega_0, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \} \quad (2.84)$$

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{P} \in L^2(\Omega_0, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \} \quad (2.85)$$

estando $H^1(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ y $L^2(\Omega_0, \mathbb{R}^n)$ definidos en el apéndice C. \mathcal{U}_0 , \mathcal{F} y \mathcal{P} se denominan respectivamente espacio de deformaciones admisibles, de gradientes de deformaciones admisibles y de tensiones admisibles.

Considerando todas las variaciones $(\delta \boldsymbol{\varphi}, \delta \mathbf{F}, \delta \mathbf{P}) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{F} \times \mathcal{P}$, y anulando la primera variación de $\Pi(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ se obtienen las ecuaciones variacionales:

$$\int_{\Omega_0} \nabla_X(\delta \boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{P} d\Omega - \int_{\Omega_0} \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{B} d\Omega - \int_{\partial_T \Omega_0} \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \bar{\mathbf{T}} d\Gamma = 0 \quad (2.86)$$

$$\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{P} \right) \cdot \delta \mathbf{F} d\Omega = 0 \quad (2.87)$$

$$\int_{\Omega_0} (\nabla_X \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{P} d\Omega = 0 \quad (2.88)$$

Eliminando de (2.86; 2.87; 2.88) las variaciones arbitrarias $\delta \boldsymbol{\varphi}$, $\delta \mathbf{F}$ y $\delta \mathbf{P}$, se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al principio variacional:

$$\text{DIV } \mathbf{P} - \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_0 \quad (2.89)$$

$$\nabla_X \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_0 \quad (2.90)$$

$$-\mathbf{P} + \frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_0 \quad (2.91)$$

$$\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{P} \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial_T \Omega_0 \quad (2.92)$$

siendo \mathbf{N} el versor normal a $\partial_T \Omega_0$

Observación 2.4.4 Como se comentó anteriormente, es frecuente expresar la función de energía interna en términos del tensor derecho de Cauchy-Green. De esta forma, la ecuación (2.91) quedaría:

$$-\mathbf{P} + 2\mathbf{F} \frac{\partial \widehat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{0} \quad (2.93)$$

Observación 2.4.5 Las ecuaciones (2.89; 2.90; 2.91; 2.92) definen la formulación fuerte del problema de contorno, en la configuración de referencia.

Observación 2.4.6 La ecuación (2.89) expresa el balance de la cantidad de movimiento, (2.90) establece la igualdad entre el gradiente de deformaciones independiente \mathbf{F} y el gradiente de deformaciones compatible $\nabla_X \boldsymbol{\varphi}$, (2.91) identifica el campo independiente de tensiones nominales \mathbf{P} con el que proviene del potencial elástico $W(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ y (2.92) iguala la tensiones nominales impuestas en $\partial_T \Omega_0$ con el vector tensión que se deduce de \mathbf{P} .

2.4.2. Formulación variacional modificada con campos de deformaciones mejoradas supuestas

En el caso de problemas con deformaciones finitas, el ingrediente clave de la formulación con deformaciones supuestas es descomponer aditivamente el gradiente de deformaciones:

$$\mathbf{F} = \underbrace{\nabla_X \boldsymbol{\varphi}}_{\text{compatible}} + \underbrace{\tilde{\mathbf{F}}}_{\text{mejorado}} \quad (2.94)$$

Sustituyendo (2.94) en (2.82) se obtiene el funcional de Hu-Washizu reparametrizado:

$$\Pi(\boldsymbol{\varphi}, \tilde{\mathbf{F}}, \mathbf{P}) = \int_{\Omega_0} \left(W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) - \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \right) d\Omega - \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{B} d\Omega - \int_{\partial_T \Omega_0} \boldsymbol{\varphi} \cdot \bar{\mathbf{T}} d\Gamma \quad (2.95)$$

Para anular la primera variación de (2.95), y obtener las ecuaciones variacionales, es necesario reparametrizar también las variaciones admisibles $\delta \mathbf{F}$ del conjunto \mathcal{F} definido en (2.84):

$$\delta \mathbf{F} = \nabla_X \delta \boldsymbol{\varphi} + \delta \tilde{\mathbf{F}}; \quad \forall \delta \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{U}_0, \quad \forall \delta \tilde{\mathbf{F}} \in \tilde{\mathcal{F}} \equiv \mathcal{F} \quad (2.96)$$

Anulando la primera variación de (2.95):

$$\delta \Pi(\nabla_X \boldsymbol{\varphi}, \tilde{\mathbf{F}}, \mathbf{P}) = 0 \quad \forall (\delta \boldsymbol{\varphi}, \delta \tilde{\mathbf{F}}, \delta \mathbf{P}) \in \mathcal{U}_0 \times \tilde{\mathcal{F}} \times \mathcal{P} \quad (2.97)$$

se obtiene:

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \cdot \nabla_X (\delta \boldsymbol{\varphi}) d\Omega - \int_{\Omega_0} \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{B} d\Omega - \int_{\partial_T \Omega_0} \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{T} d\Gamma = 0 \quad (2.98)$$

$$\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{P} \right) \cdot \delta \tilde{\mathbf{F}} d\Omega = 0 \quad (2.99)$$

$$\int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{F}} \cdot \delta \mathbf{P} d\Omega = 0 \quad (2.100)$$

que son las ecuaciones variacionales reparametrizadas con el gradiente de deformaciones mejorado. Las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen a partir de estas ecuaciones son:

$$\text{DIV} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_0 \quad (2.101)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_0 \quad (2.102)$$

$$-\mathbf{P} + \frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_0 \quad (2.103)$$

$$\bar{\mathbf{T}} - \mathbf{P} \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial_T \Omega_0 \quad (2.104)$$

Observación 2.4.7 *Al igual que sucedía en el problema con deformaciones infinitesimales (sección 2.3.2), la parte mejorada del gradiente de deformaciones es nula en la solución exacta del problema del medio continuo. Sin embargo, para la solución aproximada del problema discretizado, en general $\tilde{\mathbf{F}} \neq \mathbf{0}$.*

2.4.3. Formulación aproximada mediante elementos finitos mixtos

En este apartado se describe la formulación mixta de elementos finitos, que aproxima el problema variacional descrito mediante las ecuaciones (2.98; 2.99; 2.100).

Con la discretización definida en el apartado 2.3.3, el espacio definido en (2.81) se aproxima por el subespacio de dimensión finita:

$$\mathcal{U}_h = \left\{ \boldsymbol{\varphi}_h = \sum_{A=1}^{n_{\text{nod}}} (\mathbf{X}_A + \mathbf{d}_A) N_A, \quad \boldsymbol{\varphi}_h = \bar{\boldsymbol{\varphi}} \text{ en } \partial_{\varphi} \Omega_0 \right\} \quad (2.105)$$

siendo \mathbf{d}_A el vector de desplazamientos nodales. La expresión (2.94) se aproxima de acuerdo con (2.105):

$$\mathbf{F}_h = \nabla_X \boldsymbol{\varphi}_h + \tilde{\mathbf{F}} \quad (2.106)$$

La parte mejorada de \mathbf{F}_h se construye en tres pasos (Simó et al., 1993a):

1. Definición de un tensor $\mathbb{F}(\boldsymbol{\xi})$ en el espacio isoparamétrico (que debe de verificar unas condiciones que se discutirán más adelante).
2. Transformación de $\mathbb{F}(\boldsymbol{\xi})$ a la configuración de referencia mediante la expresión:

$$\tilde{\mathbb{F}} = \frac{j_0}{j} \mathbf{J}_0 \mathbb{F}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{J}_0^{-1} \quad (2.107)$$

o bien,

$$\tilde{\mathbb{F}} = \frac{j_0}{j} \mathbf{J}_0^{-T} \mathbb{F}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{J}_0^{-1} \quad (2.108)$$

siendo \mathbf{J} la matriz jacobiana de la transformación isoparamétrica:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad \mathbf{J}_0 = \mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}} \quad (2.109)$$

y $j = j(\boldsymbol{\xi}) = \det(\mathbf{J})$, $j_0 = \det(\mathbf{J}_0)$

3. Push-forward de $\tilde{\mathbb{F}}$, (ver Apéndice B), particularizando \mathbf{F} en el centroide:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_0 \tilde{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.110)$$

Observación 2.4.8 *Estos tres pasos se pueden interpretar de una manera intuitiva. En primer lugar se define un tensor \mathbb{F} cuyos índices están en el espacio isoparamétrico. A continuación, los índices se pasan a la configuración de referencia obteniendo $\tilde{\mathbb{F}}$. Por último, el índice contravariante de $\tilde{\mathbb{F}}$ se pasa a la configuración deformada obteniéndose \mathbf{F} .*

Los espacios definidos en (2.81; 2.83; 2.84; 2.85), se aproximan por los siguientes subespacios de dimensión finita:

$$\mathcal{U}_{0h} = \left\{ \delta\varphi_h : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t \mid \delta\varphi_h \in H^1(\Omega_0, \mathbb{R}^n), \delta\varphi_h = \mathbf{0} \text{ en } \partial_\varphi\Omega_0 \right\} \quad (2.111)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_h = \left\{ \tilde{\mathbb{F}} \in L^2(\Omega_0^e, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \right\} \quad (2.112)$$

$$\mathcal{P}_h = \left\{ \mathbf{P}_h \in L^2(\Omega_0, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \right\} \quad (2.113)$$

El funcional de Hu-Washizu, expresado en términos de los espacios de dimensión finita anteriormente definidos, es:

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi_h, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{P}_h) = & \int_{\Omega_0} \left(W(\mathbf{X}, \mathbf{F}_h) - \mathbf{P}_h \cdot \mathbf{F}_0 \tilde{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\xi}) \right) d\Omega - \int_{\Omega_0} \varphi_h \cdot \mathbf{B} d\Omega \\ & - \int_{\partial_T\Omega_0} \varphi_h \cdot \bar{\mathbf{T}} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.114)$$

Haciendo:

$$\delta\Pi(\varphi_h, \tilde{\mathbb{F}}, \mathbf{P}_h) = 0 \quad \forall (\delta\varphi_h, \delta\tilde{\mathbb{F}}, \delta\mathbf{P}_h) \in \mathcal{U}_{0h} \times \tilde{\mathcal{F}}_h \times \mathcal{P}_h \quad (2.115)$$

se obtienen las ecuaciones variacionales del problema aproximado:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F}_h)}{\partial \mathbf{F}} \cdot \left(\nabla_X(\delta\varphi_h) + \nabla_0(\delta\varphi_h) \tilde{\mathbb{F}} \right) \right] d\Omega - \\ \int_{\Omega_0} \delta\varphi_h \cdot \mathbf{B} d\Omega - \int_{\partial_T\Omega_0} \delta\varphi_h \cdot \bar{\mathbf{T}} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F}_h)}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{P}_h \right) \cdot \mathbf{F}_0 \delta\tilde{\mathbb{F}} d\Omega = 0 \quad (2.117)$$

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{F}_0 \tilde{\mathbb{F}} \cdot \delta\mathbf{P}_h d\Omega = 0 \quad (2.118)$$

siendo:

$$\nabla_0(\cdot) = \nabla_X(\cdot)|_{\mathbf{X}=\mathbf{0}} \quad (2.119)$$

Observación 2.4.9 *Para obtener las ecuaciones (2.116; 2.117; 2.118) se ha considerado la relación:*

$$\delta\tilde{\mathbf{F}}_h = \nabla_0(\delta\varphi_h) \tilde{\mathbb{F}} + \nabla_0\varphi_h \delta\tilde{\mathbb{F}} \quad (2.120)$$

Análogamente a como se hizo en el caso infinitesimal, el campo de tensiones \mathbf{P}_h se elimina de las ecuaciones (2.116; 2.117; 2.118) imponiendo a priori la ortogonalidad generalizada entre los elementos de $\tilde{\mathcal{F}}_h$ y \mathcal{P}_h a través de $\nabla_0 \mathcal{U}_h$:

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{P}_h \cdot \mathbf{F}_0 \tilde{\mathbb{F}} d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{P}_h \in \mathcal{P}, \quad \forall \tilde{\mathbb{F}} \in \tilde{\mathcal{F}}_h \quad (2.121)$$

Observación 2.4.10 *Al eliminar explícitamente de la formulación el campo independiente \mathbf{P}_h , las tensiones de cálculo son las que se obtienen a partir de la función de densidad de energía:*

$$\hat{\mathbf{P}}_h = \frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F}_h)}{\partial \mathbf{F}} \quad (2.122)$$

Las ecuaciones variacionales aproximadas resultan entonces:

$$\int_{\Omega_0} \left[\hat{\mathbf{P}}_h \cdot \left(\nabla_X(\delta \varphi_h) + \nabla_0(\delta \varphi_h) \tilde{\mathbb{F}} \right) - \delta \varphi_h \cdot \mathbf{B} \right] d\Omega - \int_{\partial_T \Omega_0} \delta \varphi_h \cdot \bar{\mathbf{T}} d\Gamma = 0 \quad (2.123)$$

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F}_h)}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}_0 \delta \tilde{\mathbb{F}} d\Omega = 0 \quad (2.124)$$

2.4.4. Formulación matricial

La formulación matricial de las ecuaciones (2.123; 2.124), con objeto de que la implementación computacional sea eficiente (Simó y Armero, 1993; Armero y Glaser, 1997), se realiza en la configuración deformada. Para ello se hace el push-forward (ver apéndice B) del tensor de Piola-Kirchhoff y del gradiente de deformaciones:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\mathbf{P}} \mathbf{F}^T \quad (2.125)$$

$$\nabla_x \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}^{-T} \nabla_X \boldsymbol{\varphi} \quad (2.126)$$

obteniéndose el tensor de tensiones de Kirchhoff $\hat{\boldsymbol{\tau}}$, y el gradiente de deformaciones en la configuración deformada ∇_x . Dado que algunos tensores están definidos en el centroide del elemento, se empleará la siguiente notación:

$$\bar{\nabla}_X[\cdot] = \nabla_X[\cdot] + \tilde{\mathbb{F}} \nabla_0[\cdot] \quad (2.127)$$

$$\bar{\nabla}_x[\cdot] = \mathbf{F}^{-T} \bar{\nabla}_X[\cdot] \quad (2.128)$$

$$\bar{\nabla}_0[\cdot] = \mathbf{F}_0^{-T} \nabla_0[\cdot] \quad (2.129)$$

Con esta notación, las ecuaciones (2.123; 2.124) se reescriben:

$$\int_{\Omega_t} [\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\nabla}_x \delta \varphi_h - \delta \varphi_h \cdot \mathbf{B}] d\Omega - \int_{\partial_T \Omega_0} \delta \varphi_h \cdot \bar{\mathbf{T}} d\Gamma = 0 \quad (2.130)$$

$$\int_{\Omega_t} \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\nabla}_0 \varphi_h \delta \tilde{\mathbb{F}} d\Omega = 0 \quad (2.131)$$

Para expresar (2.130; 2.131) en forma matricial, la deformación $\boldsymbol{\varphi}_h$ se interpola a nivel elemental con las funciones de forma compatibles, de acuerdo con la expresión (2.105), resultando:

$$\overline{\nabla}_x \boldsymbol{\varphi}_h^e = \overline{\nabla}_x \left(\sum_{A=1}^{n_{\text{nod}}^e} (\mathbf{X}_A + \mathbf{d}_A) N_A \right) \quad (2.132)$$

$$\overline{\nabla}_0 \boldsymbol{\varphi}_h^e = \overline{\nabla}_0 \left(\sum_{A=1}^{n_{\text{nod}}^e} (\mathbf{X}_A + \mathbf{d}_A) N_A \right) \quad (2.133)$$

$$(2.134)$$

La interpolación del gradiente de deformaciones mejorado se define en el espacio isoparamétrico:

$$\mathbb{F} = \sum_{I=1}^{n_{\text{enh}}} \Gamma_I \mathbb{F}_I \quad (2.135)$$

siendo n_{enh} el número de modos mejorados y Γ_I parámetros internos del elemento. Al tensor \mathbb{F} obtenido mediante (2.135) se le aplican posteriormente las transformaciones definidas en (2.107; 2.110).

Con objeto de reordenar las ecuaciones (2.130; 2.131) de acuerdo con la notación estándar en que el tensor de tensiones se expresa en forma de vector, se definen las matrices:

$$\mathbf{b}_A = \begin{pmatrix} \overline{\nabla}_1 N_A & 0 \\ 0 & \overline{\nabla}_2 N_A \\ \overline{\nabla}_2 N_A & \overline{\nabla}_1 N_A \end{pmatrix} \quad A = 1 \dots n_{\text{nod}}^e \quad (2.136)$$

$$\mathbf{g}_I = \begin{pmatrix} (G_I)_{11} \\ (G_I)_{22} \\ (G_I)_{12} + (G_I)_{21} \end{pmatrix} \quad I = 1 \dots n_{\text{enh}}^e \quad \mathbf{G}_I = \mathbf{F}_0 \widetilde{\mathbb{F}}_I \mathbf{F}^{-1} \quad (2.137)$$

El sistema de ecuaciones variacionales aproximadas se escribe finalmente:

$$\mathbf{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A} \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left[\mathbf{f}^{e,\text{ext}} - \int_{\Omega_t^e} \mathbf{b}^T \widehat{\boldsymbol{\tau}}_h d\Omega \right] = \mathbf{0} \quad (2.138)$$

$$\mathbf{h}_{\text{enh}}^e \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_t^e} \mathbf{g}^T \widehat{\boldsymbol{\tau}}_h d\Omega = \mathbf{0} \quad (2.139)$$

siendo \mathbf{A} el operador de ensamblaje.

2.4.5. Condiciones de convergencia y estabilidad

Existen dos requisitos para que los elementos formulados con deformaciones supuestas sean estables:

1. La condición de ortogonalidad expresada en (2.121). De esta expresión se deduce que para campos de tensión nominal constante $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$, se ha de verificar:

$$\int_{\Omega_0^e} \tilde{\mathbb{F}} d\Omega = 0 \quad (2.140)$$

y sustituyendo (2.107) resulta la integral extendida al dominio isoparamétrico \square :

$$\int_{\square} \mathbb{F} d\square = 0 \quad (2.141)$$

2. Los gradientes de deformación contenidos en \mathcal{E} , no deben pertenecer al conjunto de gradientes de deformación compatibles, obtenidos a partir del campo de desplazamientos contenido en \mathcal{U}_h :

$$\nabla_X \mathcal{U}_h \cap \tilde{\mathcal{F}}_h = \emptyset \quad (2.142)$$

Observación 2.4.11 *En la formulación para deformaciones infinitesimales los requisitos 1 y 2 garantizan la convergencia y estabilidad del método. En concreto, con el primero se garantiza que el elemento pasa la prueba de la parcela. En el caso no lineal, garantizan que el elemento reproduce de manera exacta los resultados correspondientes a estados en los que el gradiente de deformación es constante.*

En el caso no lineal existe un tercer requisito adicional a los que se establecían en la formulación con deformaciones infinitesimales:

3. Los gradientes de deformación generados por el conjunto $\tilde{\mathcal{F}}_h$ no deben variar al transformarlos mediante rotaciones de sólido rígido. El gradiente compatible verifica esta propiedad. Por tanto, con este requisito se logra que el gradiente de deformación obtenido con (2.94) tampoco varíe con las rotaciones de sólido rígido.

En el siguiente apartado se expone la metodología de diseño de los elementos para que cumplan las tres condiciones anteriormente descritas.

2.4.6. Diseño de elementos

El diseño de elementos con deformaciones mejoradas supuestas consiste en definir las componentes mejoradas \mathbb{F}_I que generan el gradiente de deformaciones \mathbb{F} , de acuerdo a la expresión (2.135). Dicha definición ha de cumplir con los requerimientos descritos en la sección 2.4.5. Ejemplos de distintos elementos, para problemas bidimensionales y axilsimétricos, formulados con esta metodología son:

- **Elemento $Q1/E4$** (Simó y Armero, 1993). La formulación de este elemento coincide con la original de Wilson & Taylor para pequeñas deformaciones (Armero y Glaser, 1997). Se obtiene haciendo:

$$\mathbb{F} = \Gamma_1 \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_3 \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} \quad (2.143)$$

con la transformación (2.107).

- **Elemento $Q1/ES4$** (Armero y Glaser, 1997). Este elemento se formula simetrizando las componentes no simétricas del elemento $Q1/E4$, y su expresión es:

$$\mathbb{F} = \Gamma_1 \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_2 \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_3 \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} \quad (2.144)$$

con la transformación (2.107).

- **Elemento $Q1/ET4$** (Armero y Glaser, 1997). La formulación de este elemento se obtiene trasponiendo las componentes mejoradas del elemento $Q1/E4$:

$$\mathbb{F} = \Gamma_1 \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_2 \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \eta & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} \quad (2.145)$$

con la transformación (2.108).

- **Elemento $CG4$** (Korelc y Wriggers, 1996).

$$\mathbb{F} = \Gamma_1 \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_2 \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \eta & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} \quad (2.146)$$

con la transformación (2.108) y sin considerar \mathbf{F}_0 en la relación (2.110). Esta omisión hace que el elemento no sea objetivo bajo rotaciones de sólido rígido (Armero y Glaser, 1997).

La formulación de elementos axilsimétricos se realiza añadiendo el modo correspondiente a la deformación circunferencial (Simó y Armero, 1993). Las familias de estos elementos, que se corresponden con los ya descritos, son las siguientes:

- **Elemento Axilsimétrico $Q1/E5$:**

$$\begin{aligned} \mathbb{F} = \Gamma_1 \begin{pmatrix} \xi - \bar{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi - \bar{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_3 \begin{pmatrix} 0 & \eta - \bar{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ + \Gamma_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta - \bar{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \eta \frac{j(\xi)}{j_0 R(\xi)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.147)$$

- **Elemento Axilsimétrico $Q1/ES5$:**

$$\begin{aligned} \mathbb{F} = \Gamma_1 \begin{pmatrix} \xi - \bar{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_2 \begin{pmatrix} 0 & \xi - \bar{\xi} & 0 \\ \xi - \bar{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_3 \begin{pmatrix} 0 & \eta - \bar{\eta} & 0 \\ \eta - \bar{\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ + \Gamma_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta - \bar{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \eta \frac{j(\xi)}{j_0 R(\xi)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.148)$$

■ **Elemento Axilsimétrico Q1/ET5:**

$$\begin{aligned} \mathbb{F} = & \Gamma_1 \begin{pmatrix} \xi - \bar{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_2 \begin{pmatrix} 0 & \xi - \bar{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \eta - \bar{\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + \Gamma_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta - \bar{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \eta \frac{j(\xi)}{j_0 R(\xi)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.149)$$

siendo:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{\int_{\square} R(\xi) d\xi} \int_{\square} \xi R(\xi) d\xi \quad (2.150)$$

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\int_{\square} R(\xi) d\xi} \int_{\square} \eta R(\xi) d\xi \quad (2.151)$$

2.4.7. Implementación numérica

Para la implementación computacional de los elementos descritos, el procedimiento es análogo al desarrollado en el caso de deformaciones infinitesimales. Las expresiones linealizadas de los vectores de fuerzas internas y $\mathbf{h}^{e, \text{enh}}$ que aparecen en la ecuaciones (2.138; 2.139) son para la iteración k :

$$\hat{\mathbf{f}}^{e, \text{int}} = \mathbf{f}^{e, \text{int}(k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{e, \text{int}}}{\partial \Gamma} \right|^{(k)} \Delta \Gamma^{e(k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{e, \text{int}}}{\partial \mathbf{d}} \right|^{(k)} \Delta \mathbf{d}^{e(k)} \quad (2.152)$$

$$\hat{\mathbf{h}}^{e, \text{enh}} = \mathbf{h}^{e, (k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial \Gamma} \right|^{(k)} \Delta \Gamma^{e(k)} + \left. \frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial \mathbf{d}} \right|^{(k)} \Delta \mathbf{d}^{e(k)} \quad (2.153)$$

Por motivos de claridad, en este caso las matrices se expresarán en notación indicial. De acuerdo con las definiciones (2.128, 2.136; 2.137) y considerando los subíndices $A, B = 1 \dots n_{\text{nod}}^e$, y $I, J = 1 \dots n_{\text{enh}}$, resulta:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_A^{e, \text{int}}}{\partial \mathbf{d}_B} = \int_{\Omega_t^e} \mathbf{b}_A^T \mathbf{c}^e \mathbf{b}_B d\Omega + \left[\int_{\Omega_t^e} \bar{\nabla}_x N_A \boldsymbol{\tau} \bar{\nabla}_x N_B d\Omega \right] \mathbf{1} \quad (2.154)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_A^{e, \text{int}}}{\partial \Gamma_I} = \int_{\Omega_t^e} \mathbf{b}_A^T \mathbf{c}^e \mathbf{g}_I d\Omega + \int_{\Omega_t^e} (\mathbf{G}_I \boldsymbol{\tau} \bar{\nabla}_x N_A + \boldsymbol{\tau} \mathbf{G}_I^T \nabla_0 N_A) d\Omega \quad (2.155)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_I^e}{\partial \Gamma_J} = \int_{\Omega_t^e} \mathbf{g}_I^T \mathbf{c}^e \mathbf{g}_J d\Omega + \int_{\Omega_t^e} (\mathbf{G}_I \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{G}_J d\Omega \quad (2.156)$$

donde \mathbf{c}^e es la matriz de orden 2 que se obtiene a partir del tensor constitutivo tangente \mathbf{c}^e de orden 4, siguiendo el procedimiento detallado en (Hughes, 1987). Las componentes de \mathbf{c}^e son:

$$\mathbf{c}_{ijkl}^e = 2F_A^i F_B^j F_C^k F_D^l \frac{\partial W}{\partial C_{AB} \partial C_{CD}} \quad (2.157)$$

Observación 2.4.12 Para los modelos hiperelásticos considerados, se verifica:

$$\frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial \mathbf{d}} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}^{e,\text{int}}}{\partial \Gamma} \right)^T \quad (2.158)$$

Observación 2.4.13 En las expresiones (2.154; 2.155; 2.156) las dimensiones de las matrices que resultan son:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_A^{e,\text{int}}}{\partial \mathbf{d}_B} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}} \times \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}} \quad (2.159)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_A^{e,\text{int}}}{\partial \Gamma_I} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}} \quad (2.160)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_I^e}{\partial \Gamma_J} \in \mathbb{R}^{n_{\text{enh}}} \quad (2.161)$$

y al agrupar a nivel elemental los subíndices A, B, I y J , resulta:

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{e,\text{int}}}{\partial \mathbf{d}} \in \mathbb{R}^{(n_{\text{nod}}^e \cdot n_{\text{dim}})} \times \mathbb{R}^{(n_{\text{nod}}^e \cdot n_{\text{dim}})} \quad (2.162)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{e,\text{int}}}{\partial \Gamma} \in \mathbb{R}^{(n_{\text{nod}}^e \cdot n_{\text{dim}})} \times \mathbb{R}^{n_{\text{enh}}} \quad (2.163)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial \Gamma} \in \mathbb{R}^{n_{\text{enh}}} \times \mathbb{R}^{n_{\text{enh}}} \quad (2.164)$$

Finalmente, para realizar la implementación en un programa de elementos finitos, si se definen las matrices:

$$\mathbf{K}^e = \frac{\partial \mathbf{f}^{e,\text{int}}}{\partial \mathbf{d}} \quad (2.165)$$

$$\mathbf{\Gamma}^e = \frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial \mathbf{d}} \quad (2.166)$$

$$\mathbf{H}^e = \frac{\partial \mathbf{h}^e}{\partial \Gamma} \quad (2.167)$$

el esquema que resulta es idéntico al descrito en el apartado 2.3.7 para el caso de deformaciones infinitesimales, pudiéndose emplear el algoritmo del cuadro 2.1.

2.4.8. Problemas con la subintegración de los elementos: Ejemplos

La formulación para grandes deformaciones descrita en este capítulo presenta un problema de subintegración cuando se emplean cuatro puntos de Gauss, como queda demostrado a partir de ensayos numéricos (Simó et al., 1993a). Posteriormente se justifica de manera analítica (Wriggers y Reese, 1996) la aparición de un modo de energía nula en compresión, para la formulación $Q1/E4$ empleando un modelo constitutivo hiperelástico de tipo

Neo-hookeano. Finalmente se obtienen expresiones cerradas del cálculo de autovalores para el modelo hiperelástico general de Ogden (Armero, 1996a), con aplicación a las formulaciones de los elementos propuestos en trabajos posteriores al original de Simó (Glaser y Armero, 1995; Armero y Glaser, 1997). En estos trabajos se demuestra que los elementos $Q1/ES4$ y $Q1/ET4$ no tienen el modo de energía nula en compresión, aunque también presentan un modo de energía nula en ciertas situaciones con grandes deformaciones de naturaleza plástica. En la formulación posterior de elementos mixtos mejorados (Kasper y Taylor, 1997b), este problema queda resuelto.

A continuación se muestran dos ejemplos significativos de esta problemática. Se han resuelto con los elementos y modelos constitutivos programados por el autor en el código de elementos finitos FEAP (Taylor, 1999).

Extensión simple de un elemento

Con este ejemplo básico se estudia la influencia del orden de la cuadratura de Gauss en los elementos con deformaciones supuestas. Se considera un elemento cuadrado de lado 2 sometido al estiramiento que se muestra en la figura 2.8, siendo $\lambda_2 = 3$.

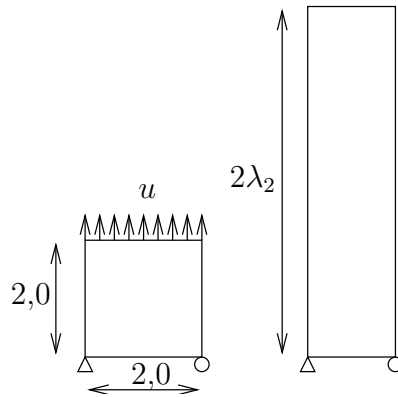


Figura 2.8: *Extensión de un elemento*

Se considera un material de Von-Mises con el modelo constitutivo elastoplástico de grandes deformaciones que se describirá en el capítulo siguiente. Las propiedades elásticas adoptadas son $E = 206,9$ y $\nu = 0,29$ para una densidad de energía elástica de tipo cuadrático: $W = 1/2(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{c}^e \boldsymbol{\varepsilon})$ en la que el tensor espacial \mathbf{c}^e es constante. El endurecimiento está definido por la ley de saturación: $\sigma_Y = 0,45 + 0,26(1 - e^{-16,93\varepsilon_p}) + 0,13\varepsilon_p$

El modelo de elementos finitos se integra con la regla de 4 puntos de Gauss, empleando los elementos $Q4$, $Q1/P0$, $Q1/E4$, $Q1/ES4$ y $Q1/ET4$. En la figura 2.9 se muestran las deformadas del elemento al final del proceso. Para un cierto valor del estiramiento se presenta el fenómeno de *hourglassing* debido a que la matriz de rigidez elemental queda subintegrada. Los modos mejorados se activan de manera espúrea, para los elementos $Q1/E4$, $Q1/ES4$

y $Q1/ET4$, cuando el estiramiento λ_2 vale 1,52, 1,42 y 1,35, respectivamente. Este hecho se muestra claramente al dibujar la energía interna frente al alargamiento (figura 2.10). El problema de subintegración se alivia con 5 y 9 puntos, aunque también se presenta un ligero hourglassing (Gabaldón y Goicolea, 1998).

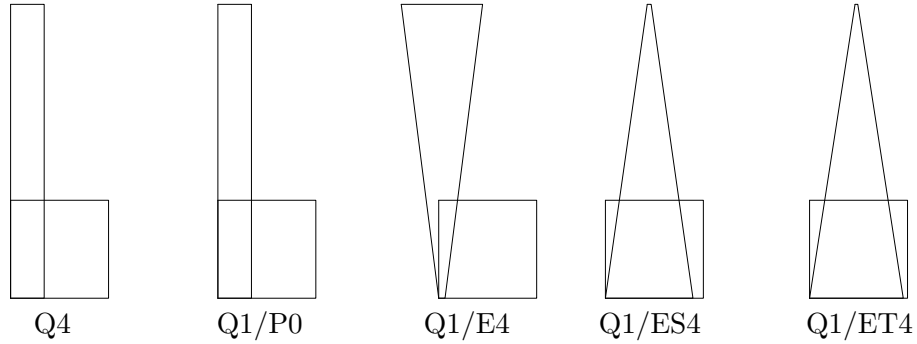


Figura 2.9: *Extensión simple de un elemento. Deformadas para la regla de integración de cuatro puntos de Gauss.*

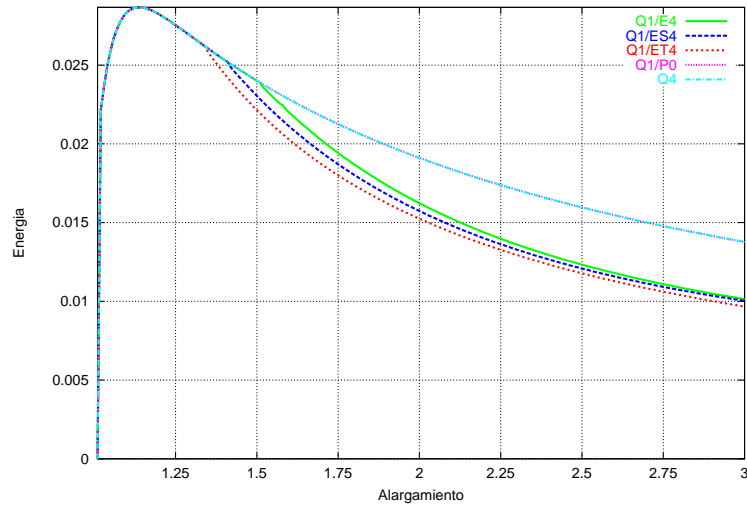


Figura 2.10: *Energía de deformación (incremental) para 4 puntos de Gauss*

Estricción en deformación plana

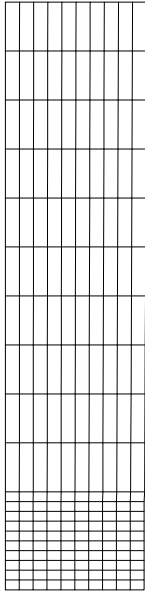


Figura 2.11: *Malla de elementos finitos*

En este ejemplo se analiza el ensayo de tracción simple de una probeta rectangular en deformación plana, produciéndose una estricción en la zona central de la misma. Este ejemplo ha sido analizado anteriormente en (Armero y Glaser, 1997).

Se considera una probeta de dimensiones $53,334 \times 12,826$, modelizándose por condiciones de simetría $1/4$ de la misma. Para conseguir que se forme la estricción se reduce el ancho en la sección central un $0,982\%$, suponiendo que la variación es lineal entre esta sección y las secciones extremas. La malla tiene 10×20 elementos, con la discretización que se muestra en la figura 2.11.

El problema se resuelve con control de desplazamientos. En el borde superior se aplica un desplazamiento en dirección axial que llega a valer $u = 7$ al final del análisis. El modelo constitutivo empleado es idéntico al del ejemplo anterior.

El problema se resuelve con los elementos $Q1/E4$ y $Q1/ES4$, integrados con 4, 5 y 9 puntos de Gauss. Con 4 puntos, cuando el desplazamiento impuesto es $u = 5,6$ el “hourglassing” se ha propagado por la malla dando lugar a resultados no válidos. En la figura 2.12 se muestran las deformadas obtenidas y un detalle de la zona de estricción.

Empleando reglas de 5 y 9 puntos de Gauss, este problema se corrige obteniéndose las deformadas de las figuras 2.13 y 2.14, respectivamente. No obstante aún se puede apreciar un ligero hourglassing. Desaparecería añadiendo términos de rigidez artificial (Armero y Glaser, 1997).

La figura 2.15 muestra la curva fuerza-desplazamiento obtenida. Los resultados obtenidos con los elementos $Q1/ES4$ y $Q1/ET4$ son prácticamente los mismos. Por otra parte, de este gráfico y de las figuras 2.13 y 2.14, se concluye que en este ejemplo no tiene interés emplear la regla de nueve puntos frente a la de cinco ya que los resultados son prácticamente idénticos.

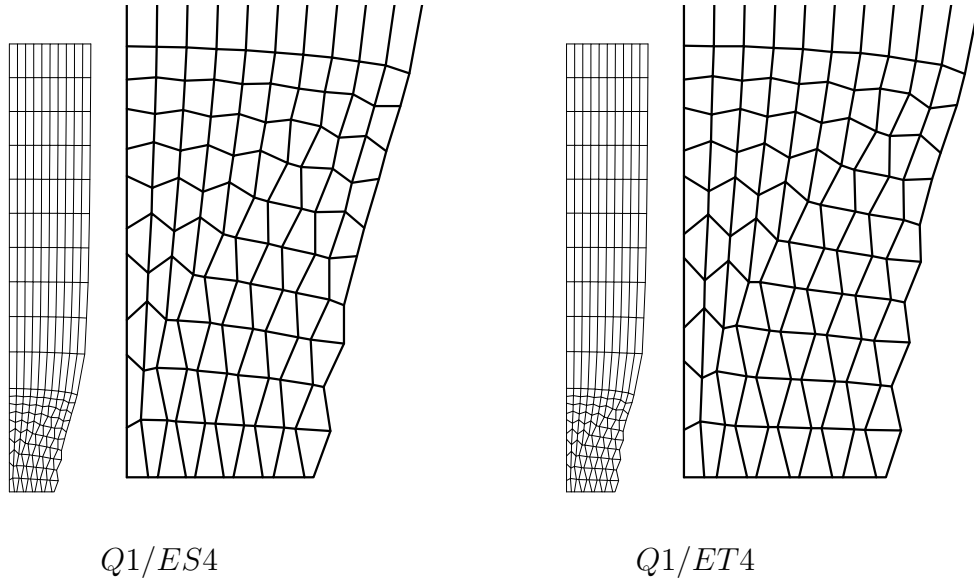


Figura 2.12: *Estricción en deformación plana ($u = 5,6$). 4 Puntos de Gauss*

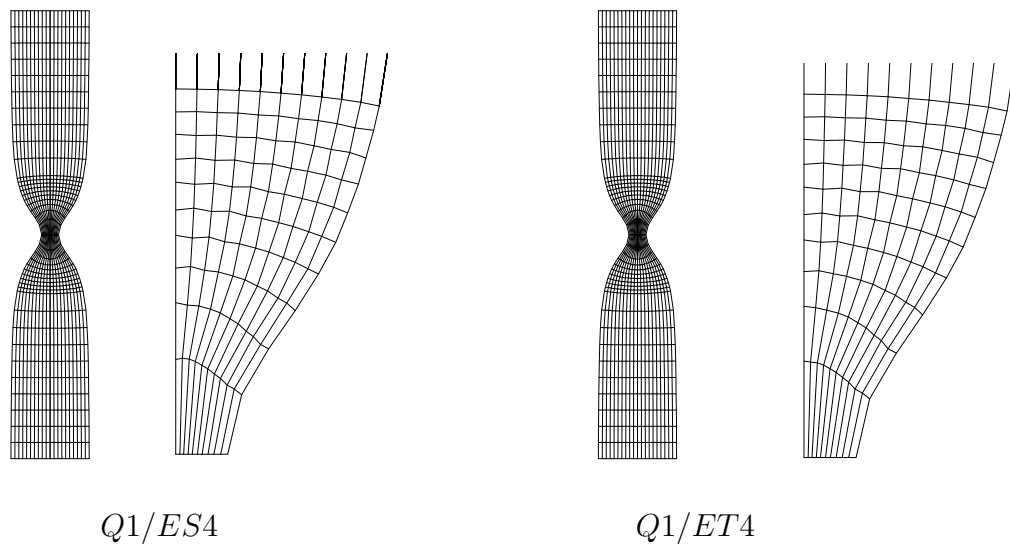
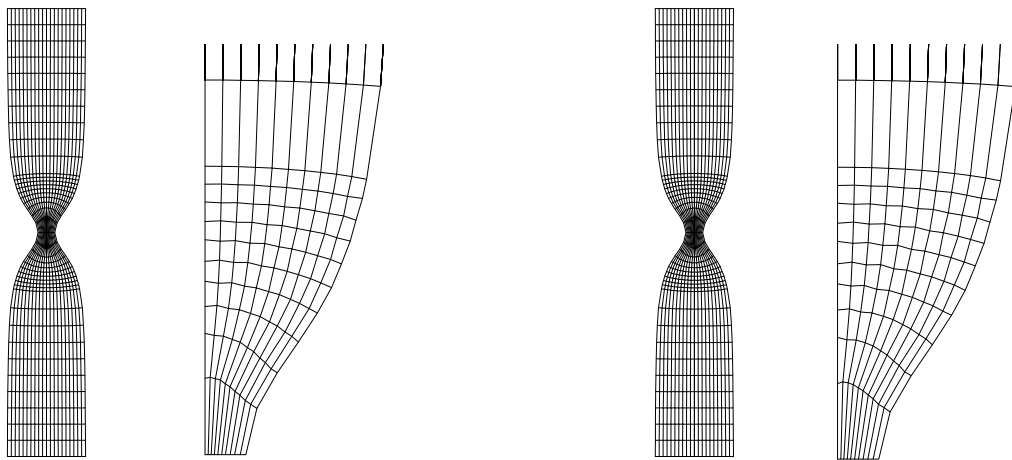


Figura 2.13: *Estricción en deformación plana ($u = 7,0$). 5 Puntos de Gauss*



$Q1/ES4$

$Q1/ET4$

Figura 2.14: *Estricción en deformación plana ($u = 7,0$). 9 Puntos de Gauss*

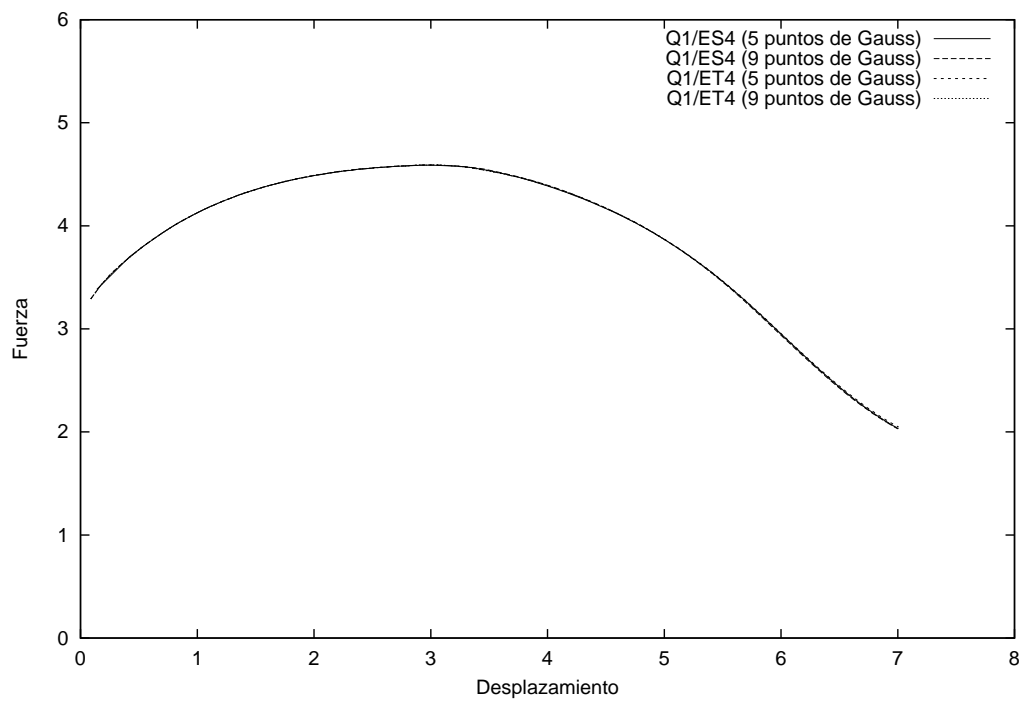


Figura 2.15: *Estricción en deformación plana. Curva Fuerza-Desplazamiento*

2.5. Conclusiones

En este capítulo se ha descrito la formulación de los elementos con deformaciones mejoradas supuestas, tanto para deformaciones infinitesimales como para problemas con grandes deformaciones. Estos elementos presentan las siguientes ventajas frente a otras formulaciones convencionales:

1. Se consiguen soluciones más precisas en mallas con menos elementos.
2. Son menos sensibles a la distorsión.
3. Su formulación es de tipo general, respondiendo correctamente tanto en problemas de flexión como en problemas cuasi-incompresibles.

Como inconvenientes están su coste computacional y la necesidad de emplear reglas de integración de Gauss con más de cuatro puntos, debido a la inestabilidad que presentan con grandes deformaciones plásticas. En el capítulo 5 se discutirá la posibilidad de representar la cinemática de las bandas de localización de deformaciones con este tipo de elementos.

Capítulo 3

Elastoplasticidad con grandes deformaciones

3.1. Resumen y Objetivos

Este capítulo se dedica a describir la formulación e implementación de un modelo constitutivo para sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones. Este modelo, formulado e implementado con elementos mixtos ([Garino, 1993](#)), se plantea en este trabajo en el contexto de los elementos con deformaciones supuestas. Se trata de un modelo con hiperelasticidad, basado en la descomposición multiplicativa del gradiente de deformaciones. El modelo se define en la configuración intermedia, resultando así objetivo para las rotaciones de sólido rígido, y se implementa en la configuración deformada con el fin de mantener las ventajas de coste computacional ya demostradas ([Garino, 1993](#)).

El capítulo comienza con la descripción de los modelos hiperelásticos isotropos. A continuación se describe la hipótesis de la descomposición multiplicativa elástica - plástica y se analizan las consecuencias e implicaciones de esta hipótesis. Antes de definir el modelo constitutivo se dedica un apartado a resumir las características principales de la cinemática del continuo elastoplástico con grandes deformaciones. A continuación se expone la metodología de integración de las ecuaciones de la plasticidad, los aspectos computacionales de la misma, y la implementación en elementos con deformaciones supuestas. El capítulo finaliza con varios ejemplos de validación, la simulación del ensayo de tracción simple con estricción, y un apartado de conclusiones. Al final de la tesis se han incluido dos apéndices con relación a este capítulo. El primero de ellos se dedica a revisar los conceptos de la plasticidad infinitesimal con aplicación a los modelos de Von-Mises y Drucker-Prager. El segundo se describe la cinemática de los medios continuos elásticos con grandes deformaciones, pretendiéndose que su lectura sirva de introducción al apartado [3.5](#).

3.2. Introducción

En este capítulo se describe el modelo constitutivo implementado en este trabajo para los elementos mejorados de grandes deformaciones descritos en el capítulo 2 ($Q1/E4$, $Q1/ES4$ y $Q1/ET4$, y los axilsimétricos correspondientes). Inicialmente fue propuesto en (Garino, 1993), integrándolo con elementos mixtos $Q1/P0$. Con el fin de comparar la respuesta de todos estos elementos, el elemento mixto empleado por (Garino, 1993) también se ha programado en este trabajo dentro del programa de elementos finitos FEAP (Taylor, 1999). Este modelo describe el comportamiento de los sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones. La metodología seguida consiste en definir a priori los elementos del modelo constitutivo imponiendo las restricciones correspondientes a los principios de objetividad y simetría material. Posteriormente se verifica el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica.

Observación 3.2.1 *Este procedimiento es empleado por algunos autores (Moran et al., 1990). De manera alternativa se puede partir de la segunda ley de la termodinámica y obtener los elementos del modelo constitutivo imponiendo que sea máxima la disipación plástica (Simó, 1988a)*

3.3. Modelos hiperelásticos

3.3.1. Definición

Los materiales cuyo comportamiento constitutivo es función exclusiva del estado de deformación que tienen en el instante considerado se denominan materiales *elásticos*. Empleando para ello el gradiente de deformación \mathbf{F} y el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} (ver apéndice B), conjugado de \mathbf{F} , la elasticidad se puede expresar mediante la relación:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) \quad (3.1)$$

Si en un material elástico el trabajo interno de un proceso de deformación depende únicamente de los estados en el instante inicial y en el final, dicho material se dice que es *hiperelástico*. Como consecuencia, existe una función de densidad de energía interna W , que verifica:

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \int_{t_0}^t \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} dt; \quad \dot{W}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} \quad (3.2)$$

De manera alternativa, la tasa de la función W se puede expresar como:

$$\dot{W}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}} \quad (3.3)$$

Identificando (3.2) y (3.3) se concluye que:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (3.4)$$

La ecuación constitutiva (3.4) se puede utilizar como definición de material hiperelástico. Si la matriz \mathbf{Q} expresa una rotación de sólido rígido ($\mathbf{Q} \in SO(3)$), el requerimiento de objetividad aplicado a la función W , implica que:

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \widehat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{Q} \in SO(3) \quad (3.5)$$

Expresando la descomposición polar de \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad \mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (3.6)$$

y particularizando \mathbf{Q} en (3.5) para la matriz \mathbf{R}^{-1} de la descomposición polar se concluye que:

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \widehat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) \quad \text{donde } \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (3.7)$$

Es decir, \widehat{W} depende únicamente de las componentes de estiramiento del tensor \mathbf{F} . Derivando $\widehat{W}(\mathbf{X}, \mathbf{C})$ respecto \mathbf{C} y teniendo en cuenta la relación entre los tensores primero y segundo de Piola-Kirchhoff (ver apéndice B), en la configuración de referencia se verifica:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.8)$$

3.3.2. Tensor elástico tangente

La relación entre los tensores de tensión y deformación dada por (3.8) es no lineal. En un esquema de solución iterativo de las ecuaciones (por ejemplo Newton-Raphson), esta relación debe de ser linealizada. Calculando las derivadas direccionales respecto de un incremento \mathbf{u} de la configuración deformada:

$$\dot{\mathbf{S}} = \left. \frac{d\mathbf{S}(\mathbf{E} + \lambda \mathbf{u})}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \quad (3.9)$$

siendo \mathbf{E} el tensor de deformaciones de Green. Aplicando la regla de la cadena se obtiene:

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{E}} \quad \text{siendo } \mathbf{C}^e = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{4 \partial^2 W}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (3.10)$$

La expresión del tensor elástico tangente en la configuración deformada se obtiene mediante el push-forward del tensor \mathbf{C}^e (ver definición B.2.13):

$$c_{ijkl}^e = F_i^I F_j^J F_k^K F_l^L C_{IJKL}^e \quad (3.11)$$

resultando:

$$\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}^e \mathcal{L}_v \mathbf{e} \quad (3.12)$$

donde \mathcal{L}_v es la derivada de Lie (Apéndice B)

3.3.3. Hiperelasticidad isótropa

Los siguientes desarrollos se restringen al caso de los materiales hiperelásticos isótropos. Un análisis muy claro y detallado de este tipo de modelos se realiza en (Bonet y Wood, 1997).

En un modelo hiperelástico isótropo la dependencia de W y \mathbf{C} debe de ser independiente de la dirección de los ejes de referencia adoptados. Por tanto, W únicamente debe depender de los invariantes del tensor \mathbf{C} :

$$W(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = W(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}, X) \quad (3.13)$$

donde:

$$I_{\mathbf{C}} = \text{traza}(\mathbf{C}) \quad (3.14)$$

$$II_{\mathbf{C}} = \text{traza}(\mathbf{C}\mathbf{C}) \quad (3.15)$$

$$III_{\mathbf{C}} = \det(\mathbf{C}) \quad (3.16)$$

Sustituyendo (3.13) en (3.8), y considerando:

$$\frac{\partial I_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial II_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = 2\mathbf{C} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial III_{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = J^2 \mathbf{C}^{-1} \quad J = \det \mathbf{F} \quad (3.19)$$

resulta finalmente:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_{\mathbf{C}}} \mathbf{1} + 4 \frac{\partial W}{\partial II_{\mathbf{C}}} \mathbf{C} + 2J^2 \frac{\partial W}{\partial III_{\mathbf{C}}} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.20)$$

La expresión (3.20) puede transformarse a la configuración deformada, quedando en términos del tensor de tensiones de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$, y del tensor de Finger \mathbf{b} (ver apéndice B):

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_{\mathbf{b}}} \mathbf{b} + 4 \frac{\partial W}{\partial II_{\mathbf{b}}} \mathbf{b}^2 + 2J^2 \frac{\partial W}{\partial III_{\mathbf{b}}} \mathbf{1} \quad (3.21)$$

Observación 3.3.1 La expresión (3.21) se obtiene sustituyendo en (3.20) las relaciones entre \mathbf{b} y \mathbf{C} y entre $\boldsymbol{\tau}$ y \mathbf{S} (apéndice B), y teniendo en cuenta que los invariantes de \mathbf{b} y \mathbf{C} son los mismos.

Ejemplo 3.1 (Material Neo-hookeano compresible) En este ejemplo se aplican los desarrollos anteriores al caso particular de un material hiperelástico isótropo denominado sólido Neo-hookeano compresible. En estos materiales, la función densidad de energía tiene la expresión:

$$W(\mathbf{C}) = \frac{\lambda}{2} (\log J)^2 - \mu \log J + \frac{\mu}{2} (\text{traza}(\mathbf{C}) - 3) \quad (3.22)$$

siendo λ y μ los coeficientes de Lamé.

Observación 3.3.2 En la expresión (3.22) los dos primeros sumandos son las componentes volumétricas de la energía. El sumando $\frac{\mu}{2}(\text{traza}(\mathbf{C}) - 3)$ es el término Neo-hookeano y está asociado a la deformación de corte.

Observación 3.3.3 En ausencia de deformación $\mathbf{C} = \mathbf{1}$, $J = 1$, con lo que razonablemente se anula la función W .

El tensor de tensiones se obtiene aplicando (3.8) a (3.22). Operando:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\lambda \log J - \mu}{J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} - \mu \mathbf{1} \quad (3.23)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{J}{2} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.24)$$

resulta finalmente:

$$\mathbf{S} = \lambda \log J \mathbf{C}^{-1} - \mu(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{1}) \quad (3.25)$$

El mismo modelo se puede describir en la configuración deformada, el tensor de tensiones de Kirchhoff se obtiene mediante el push-forward de \mathbf{S} :

$$\boldsymbol{\tau} = (\lambda \log J - \mu) \mathbf{1} + \mu \mathbf{b} \quad (3.26)$$

Para obtener el tensor \mathbf{C}^e se aplica (3.10), y resulta expresado en componentes:

$$C_{IJKL}^e = \lambda C_{IJ}^{-1} C_{KL}^{-1} + 2(\mu - \lambda \log J) C_{IK}^{-1} C_{JL}^{-1} \quad (3.27)$$

y haciendo el push-forward se obtiene el tensor \mathbf{c} que relaciona la tasa de las tensiones de Kirchhoff con la de las deformaciones de Almansi:

$$c_{ijkl}^e = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2(\mu - \lambda \log J) \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (3.28)$$

Observación 3.3.4 En el caso particular de deformaciones infinitesimales $J \approx 1$, y la expresión (3.28) se corresponde con la ley de Hooke.

3.4. Modelos basados en la descomposición multiplicativa

Desde el punto de vista micromecánico, el flujo plástico de monocristales puede interpretarse que corresponde a movimientos de dislocación de la red cristalina. Esta interpretación es el punto de partida de las descripciones del flujo plástico en problemas de plasticidad de metales, y se muestra en la figura 3.1 para el caso de un cristal en el que los movimientos de la red cristalina son paralelos a un único plano. La base ortonormal $\{\mathbf{m}, \mathbf{s}\}$ se considera unida a la red cristalina. El versor \mathbf{m} se toma en la dirección de dislocación. El versor \mathbf{s} es perpendicular a \mathbf{m} , siendo el movimiento de la red paralelo al plano

definido por ambos versores. La transformación definida por \mathbf{F}^p está asociada únicamente a un movimiento de dislocación del material que deja invariable la red cristalina. Esta transformación queda definida mediante la expresión:

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{1} + \gamma \mathbf{m} \otimes \mathbf{s} \quad (3.29)$$

siendo γ la magnitud de la dislocación. El tensor \mathbf{F}^e está asociado al estiramiento y rotación de la red cristalina. La deformación total se expresa entonces mediante:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (3.30)$$

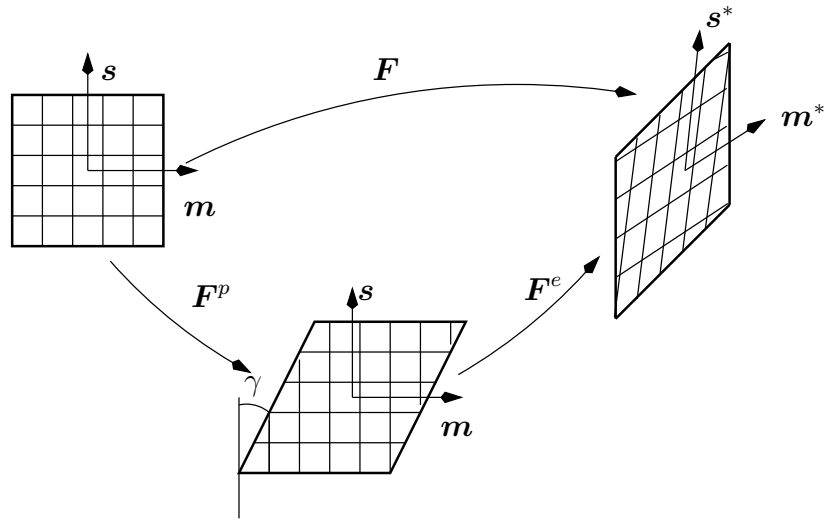


Figura 3.1: Interpretación física de la descomposición multiplicativa del gradiente de deformaciones

El inconveniente de la descomposición multiplicativa es que la configuración intermedia está indeterminada a falta de una rotación. Este hecho no tiene relevancia cuando el material es isótropo. Sin embargo, en materiales anisótropos es necesario considerar ecuaciones adicionales (por ejemplo, la ley de evolución del tensor plástico de vorticidad ω^p).

La descomposición multiplicativa fue propuesta a finales de los años sesenta (Lee, 1969). Unos años antes Green y Naghdi propusieron un modelo basado en la descomposición aditiva del tensor de Green-Lagrange:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p \quad (3.31)$$

A lo largo de algunos años se desarrolló una interesante polémica sobre la validez o no de ambas descomposiciones. Por otra parte, en el ámbito de la mecánica computacional algunos autores (Mc Mecking y Rice, 1975; Nagtegaal y de Jong, 1981) han empleado la descomposición aditiva del tensor velocidad de deformación:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \quad (3.32)$$

postulada originalmente para el desarrollo de la teoría clásica de la plasticidad (Hill, 1950). Afortunadamente, las hipótesis (3.30; 3.31; 3.32) son finalmente unificadas (Simó y Ortiz, 1985). En este trabajo demuestran que partiendo de la descomposición multiplicativa se llega a la descomposición aditiva de las deformaciones de Green-Lagrange \mathbf{E} y Almansi \mathbf{e} (esta última equivale a (3.32) pues la velocidad de deformación y las deformaciones de Almansi están relacionadas mediante la derivada de Lie, $\mathbf{d} = \mathcal{L}_v(\mathbf{e})$, tal y como se describe en el apéndice B.

3.5. Cinemática del problema elastoplástico

Antes de definir el modelo constitutivo implementado en este trabajo, es conveniente describir la cinemática del problema elastoplástico con grandes deformaciones. En el apéndice B se exponen los conceptos generales de la cinemática con grandes deformaciones de un medio continuo. Por tanto, aquí únicamente se detallarán los aspectos relacionados con la existencia de una configuración intermedia. Se sigue el siguiente criterio de notación:

1. Los tensores y subíndices que se refieren a la configuración de referencia se describen con letras mayúsculas, los referidos a la configuración deformada con minúsculas, y los referentes a la configuración intermedia con letras super-rayadas.
2. Los operadores push-forward y pull-back (apéndice B) se denotan por ϕ_* y ϕ^* , respectivamente. La derivada de Lie (apéndice B) se expresa \mathcal{L}_v .

Partiendo de la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones (3.30), se puede considerar que la parte plástica de dicho tensor define una tercera configuración, adicional a las de referencia y deformada, que se denomina configuración intermedia (figura 3.2).

Observación 3.5.1 *La configuración intermedia está definida de manera local, de manera que no puede interpretarse como la configuración del sólido descargado elásticamente. Se puede interpretar, de manera poco intuitiva, como la configuración formada por los entornos infinitesimales de cada punto $\mathbf{x} \in \Omega^t$, cuando \mathbf{x} se descarga elásticamente (Simó y Hughes, 1998)*

De manera análoga a como se han definido los operadores push-forward y pull-back en el apéndice B, la existencia de una configuración intermedia $\bar{\Omega}$ permite trabajar en este caso, con los siguientes operadores:

1. Push-forward plástico $\phi_*^{(p)}: \bar{\mathcal{Z}} = \phi_*^{(p)} \mathcal{Z}$, que transforma los tensores \mathcal{Z} que aplican sobre los espacios tangente y/o cotangente de la variedad Ω_0 en tensores $\bar{\mathcal{Z}}$ que aplican sobre los de la variedad $\bar{\Omega}_t$.

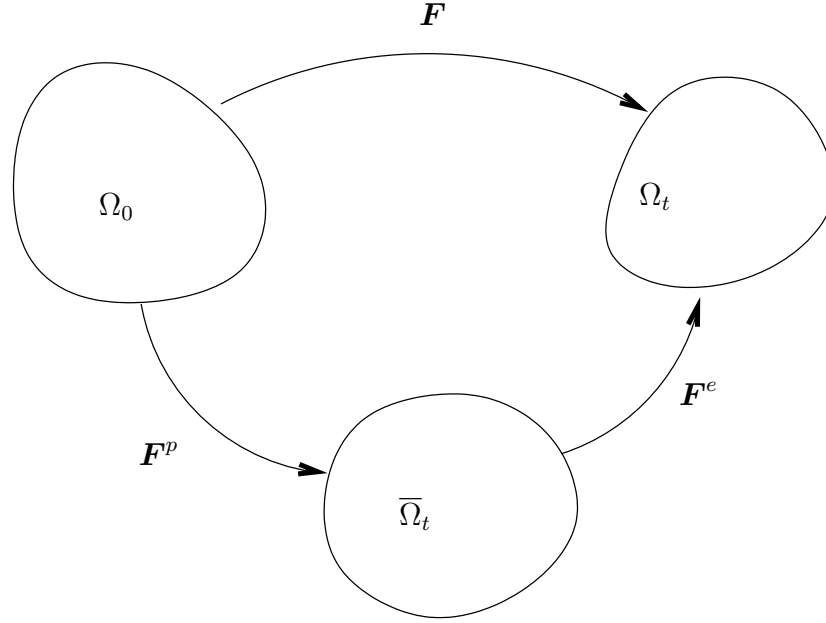


Figura 3.2: *Descomposición multiplicativa. Configuraciones original, deformada e intermedia*

2. Pull-back plástico $\phi^{*(p)}: \bar{\mathbf{Z}} = \phi^{*(p)} \mathbf{Z}$. En este caso el operador aplica sobre tensores $\bar{\mathbf{Z}}$ definidos en los espacios de la variedad $\bar{\Omega}_t$ y los transforma a tensores \mathbf{Z} de los espacios de la variedad Ω_0 .
3. Push-forward elástico $\phi_*^{(e)}: \mathbf{z} = \phi_*^{(e)} \bar{\mathbf{Z}}$. En este caso los tensores $\bar{\mathbf{Z}}$ en los espacios de la variedad $\bar{\Omega}_t$ se transforman en tensores \mathbf{z} de los espacios de la variedad Ω_t .
4. Pull-back elástico $\phi^{*(e)}: \bar{\mathbf{Z}} = \phi^{*(e)} \mathbf{z}$. Transforma los tensores \mathbf{z} en tensores $\bar{\mathbf{Z}}$.

Se definen los siguientes tensores en la configuración intermedia:

1. Tensor elástico de Cauchy-Green:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e \quad (3.33)$$

2. Tensor plástico de Finger:

$$\bar{\mathbf{b}}^p = \mathbf{F}^p \mathbf{F}^{pT} \quad (3.34)$$

A partir de (3.33; 3.34), y considerando una métrica ortonormal¹, se definen los siguientes tensores de deformación:

¹Empleando una métrica general, en lugar del tensor $\mathbf{1}$ aparecería el tensor métricos $\bar{\mathbf{G}}$

1. Tensor de deformación elástica de Green-Lagrange:

$$\overline{\mathbf{E}}^e = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{C}} - \mathbf{1}) \quad (3.35)$$

2. Tensor de deformación plástica de Green-Lagrange:

$$\overline{\mathbf{E}}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \overline{\mathbf{b}}^{p^{-1}}) \quad (3.36)$$

Aplicando los operadores push-forward y pull-back a los tensores definidos en (3.33; 3.34; 3.35; 3.36) y al tensor métrico de la configuración intermedia $\overline{\mathbf{1}}$, resulta

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{l} \mathbf{C} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{E}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{C}^p) \\ \mathbf{E}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^p - \mathbf{1}) \\ \mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{pT} \mathbf{F}^p \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_*^p} \\ \xleftarrow{\phi^{*(p)}} \end{array} & \boxed{\begin{array}{c} \overline{\mathbf{C}} \\ \overline{\mathbf{b}}^{p^{-1}} \\ \overline{\mathbf{E}}^e \\ \overline{\mathbf{E}}^p \\ \overline{\mathbf{1}} \end{array}} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_*^e} \\ \xleftarrow{\phi^{*(e)}} \end{array} & \begin{array}{l} \text{---} \\ \mathbf{b}^{-1} \\ \mathbf{e}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{e^{-T}} \mathbf{F}^{e^{-1}}) \\ \mathbf{e}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{e^{-T}} \mathbf{F}^{e^{-1}} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \\ \mathbf{b}^{e^{-1}} = \mathbf{F}^{e^{-T}} \mathbf{F}^{e^{-1}} \end{array} \end{array} \quad (3.37)$$

La conclusión más importante de las expresiones en (3.37), es que a partir de la descomposición multiplicativa se llega a la descomposición aditiva del tensor de Green-Lagrange en la configuración de referencia, y a la descomposición aditiva del tensor de Almansi en la configuración deformada.

Observación 3.5.2 *Los resultados obtenidos a partir de las definiciones en la configuración intermedia (3.33; 3.34; 3.35; 3.36), pueden ser obtenidos de otras formas. Por ejemplo (Green y Naghdi, 1965) definiendo en la configuración de referencia los tensores \mathbf{E} , \mathbf{E}^p y postulando la descomposición aditiva $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$. A partir de estas definiciones, mediante los operadores push-forward plástico y push-forward, obtienen los correspondientes tensores en las configuraciones intermedia y deformada.*

Para describir los tensores velocidad de deformación es necesario generalizar el concepto de Derivada de Lie (Marsden y Hughes, 1983) definiendo la *Derivada plástica de Lie*, que permite derivar objetivamente los tensores definidos en la configuración intermedia:

$$\mathcal{L}_v^p(\overline{\mathbf{Z}}) = \phi_*^{(p)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\phi^{*(p)} \overline{\mathbf{Z}}) \right] \quad (3.38)$$

Por otra parte, sustituyendo la descomposición multiplicativa (3.30) en la expresión del gradiente de velocidad \mathbf{l} :

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e^{-1}} + \phi_*^{(e)} \left(\dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p^{-1}} \right) \quad (3.39)$$

y de acuerdo con esta expresión se define el gradiente elástico de velocidad y el gradiente plástico de velocidad, mediante las expresiones:

$$\mathbf{l}^e = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1} \quad (3.40)$$

$$\overline{\mathbf{L}}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} \quad (3.41)$$

Partiendo de las definiciones de los tensores de deformación en la configuración intermedia, los correspondientes tensores velocidad de deformación se obtienen mediante la derivada plástica de Lie (3.38):

$$\overline{\mathbf{D}}^e = \mathcal{L}_v^p(\overline{\mathbf{E}}^e) = \frac{1}{2} \left(\dot{\overline{\mathbf{E}}}^e + \mathbf{L}^{pT} \overline{\mathbf{E}}^e + \overline{\mathbf{E}}^e \mathbf{L}^p \right) \quad (3.42)$$

$$\overline{\mathbf{D}}^p = \mathcal{L}_v^p(\overline{\mathbf{E}}^p) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{L}^{pT} + \mathbf{L}^p \right) \quad (3.43)$$

$$\overline{\mathbf{D}} = \mathcal{L}_v^p(\overline{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2} \left(\dot{\overline{\mathbf{C}}} + \mathbf{L}^{pT} \overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{C}} \mathbf{L}^p \right) \quad (3.44)$$

Aplicando los operadores push-forward y pull-back se obtiene:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \dot{\mathbf{E}}^e \\ \dot{\mathbf{E}}^p \\ \dot{\mathbf{E}} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_*^p} \\ \xleftarrow{\phi^{*(p)}} \end{array} & \boxed{\begin{array}{c} \overline{\mathbf{D}}^e \\ \overline{\mathbf{D}}^p \\ \overline{\mathbf{D}} \end{array}} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi_*^e} \\ \xleftarrow{\phi^{*(e)}} \end{array} & \begin{array}{l} \mathbf{d}^e = \frac{1}{2} \mathbf{F}^{e-T} \left(\dot{\overline{\mathbf{E}}}^e + \mathbf{L}^{pT} \overline{\mathbf{E}}^e + \overline{\mathbf{E}}^e \mathbf{L}^p \right) \mathbf{F}^{e-1} \\ \mathbf{d}^p = \frac{1}{2} \mathbf{F}^{e-T} \left(\mathbf{L}^{pT} + \mathbf{L}^p \right) \mathbf{F}^{e-1} \\ \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^{e-T} \left(\dot{\overline{\mathbf{C}}} + \mathbf{L}^{pT} \overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{C}} \mathbf{L}^p \right) \mathbf{F}^{e-1} \end{array} \end{array} \quad (3.45)$$

Observación 3.5.3 *La velocidad de deformación de los tensores definidos en la configuración de referencia se obtiene simplemente derivando respecto del tiempo, ya que esta operación es objetiva en dicha configuración:*

$$\dot{\mathbf{E}}^e = \frac{\partial \mathbf{E}^e}{\partial t} \quad (3.46)$$

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \frac{\partial \mathbf{E}^p}{\partial t} \quad (3.47)$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p \quad (3.48)$$

De la aditividad del operador derivada, se concluye que el tensor velocidad de deformación de Green-Lagrange admite la descomposición aditiva en las partes elástica y plástica.

Operando las expresiones (3.42; 3.43; 3.44; 3.45) se concluye (Garino, 1993):

$$\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{D}}^e + \overline{\mathbf{D}}^p \quad (3.49)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \quad (3.50)$$

Observación 3.5.4 *La descomposición aditiva de los tensores de deformación y de sus tasas se verifica en las tres configuraciones. En concreto, la expresión $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$, generalmente empleada en modelos hipoeelásticos (Engelman y Hallquist, 1991; Goicolea, 1990), se toma como hipótesis de partida en distintos trabajos (Mc Mecking y Rice, 1975; Nagtegaal y de Jong, 1981).*

Por otra parte, Lee y coautores solo aceptan la descomposición aditiva de \mathbf{d} si las deformaciones elásticas son pequeñas. Esta discrepancia, que radica en la definición de cada uno de los términos, está recopilada y discutida en (Garino, 1993).

3.6. Definición del modelo constitutivo

En este trabajo se emplea el modelo constitutivo definido en (Garino, 1993), y posteriormente se implementa en el contexto de los elementos formulados con deformaciones mejoradas supuestas.

La condición de objetividad se impone exigiendo la invarianza ante los movimientos de sólido rígido en la configuración espacial. Esta condición es menos restrictiva que otras que además imponen la invarianza en la configuración intermedia (Casey y Naghdi, 1980). Sea $\mathbf{Q}(t)$ una rotación de sólido rígido en la configuración espacial y $[\hat{\cdot}]$ la variable $[\cdot]$ rotada. Dado que la configuración intermedia permanece fija ante el movimiento definido por \mathbf{Q} :

$$\hat{\mathbf{F}}^p = \mathbf{F}^p \quad (3.51)$$

los requisitos de objetividad para algunos tensores significativos son:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}\mathbf{F} \quad (3.52)$$

$$\hat{\mathbf{F}}^e = \mathbf{Q}\mathbf{F}^e \quad (3.53)$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\tau}\mathbf{Q}^T \quad (3.54)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{Q}\mathbf{P} \quad (3.55)$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \quad (3.56)$$

y para cumplirlos se toman las siguientes precauciones:

1. El modelo se define en la configuración intermedia que, como ya se ha comentado, no varía con las rotaciones de sólido rígido.
2. La respuesta elástica se formula con una función hiperelástica que depende de \mathbf{C}

3.6.1. Función de energía libre

Para definir la función de energía libre Ψ , se parte de la hipótesis siguiente:

Hipótesis 3.6.1 (Elasticidad Desacoplada) *La función de energía libre se descompone aditivamente en una parte elástica (recuperable) $\bar{\Psi}^e$ y otra parte plástica (irreversible) $\bar{\Psi}^p$:*

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}^e + \bar{\Psi}^p \quad (3.57)$$

La parte elástica se identifica con la energía asociada a distorsiones de la red cristalina y la parte plástica asociada a los movimientos de dislocación.

La objetividad de la componente elástica se impone estableciendo la dependencia funcional:

$$\bar{\Psi}^e = \bar{\Psi}^e(\bar{\mathbf{C}}) \quad (3.58)$$

La componente plástica se expresa en función de un conjunto de variables internas $\bar{\xi}$ que también se definen en la configuración intermedia:

$$\bar{\Psi}^p = \bar{\Psi}^p(\bar{\xi}) \quad (3.59)$$

3.6.2. Tensor de tensiones y tensor elástico tangente

A partir de la parte elástica de la densidad de energía libre (3.58), las tensiones se obtienen mediante la expresión de los modelos hiperelásticos:

$$\bar{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial \bar{\Psi}^e(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \quad (3.60)$$

y el tensor elástico tangente en la configuración intermedia se obtiene a partir de (3.60) mediante:

$$\bar{\mathbf{C}}^e = 4 \frac{\partial^2 \bar{\Psi}^e(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}} \partial \bar{\mathbf{C}}} \quad (3.61)$$

3.6.3. Potencial plástico y criterio de fluencia

Con objeto de satisfacer el principio de equipresencia² la dependencia funcional del potencial plástico se toma igual a la de la función de energía libre:

$$\bar{G} = \bar{G}(\bar{\mathbf{C}}, \bar{\mathbf{q}}) \quad (3.62)$$

siendo $\bar{\mathbf{q}}$ las variables termodinámicamente conjugadas de $\bar{\xi}$, respecto de $\bar{\Psi}^p$. La función potencial plástico se expresa en términos del tensor $\bar{\mathbf{S}}$ sustituyendo (3.60) en (3.62):

$$\bar{G} = \bar{G}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{q}}) \quad (3.63)$$

De manera análoga se define la función de fluencia en la configuración intermedia:

$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{q}}) \quad (3.64)$$

En el caso de plasticidad asociativa, las expresiones del potencial plástico y de la función de fluencia coinciden.

²Una variable independiente presente en una ecuación constitutiva, debe estar presente en todas las demás (Truesdell y Toupin, 1960)

3.6.4. Ley de endurecimiento

La evolución de las variables internas se expresa en términos del tensor gradiente plástico de velocidad $\bar{\mathbf{L}}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1}$ en la forma:

$$\mathcal{L}_v^p \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{F}^e, \bar{\mathbf{q}}) \bar{\mathbf{L}}^p \quad (3.65)$$

siendo $\bar{\mathbf{H}}$ el tensor de módulos de endurecimiento.

Observación 3.6.1 *En el caso en que $\bar{\mathbf{q}}$ es un escalar (por ejemplo, la tensión de fluencia), la ecuación (3.65) se expresa:*

$$\dot{\bar{q}} = \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{F}^e, \bar{q}) \cdot \bar{\mathbf{L}}^p \quad (3.66)$$

Descomponiendo el tensor velocidad de deformación plástica en su parte simétrica y antisimétrica:

$$\bar{\mathbf{L}}^p = \underbrace{\bar{\mathbf{D}}^p}_{\text{simétrico}} + \underbrace{\bar{\mathbf{W}}^p}_{\text{hemisimétrico}} \quad (3.67)$$

se obtienen los tensores de velocidad de deformación plástica $\bar{\mathbf{D}}^p$ y el tensor de spin plástico $\bar{\mathbf{W}}^p$. En metales policristalinos, para estados de deformación en los que no se han desarrollado texturas que hacen perder la isotropía, es normal hacer la hipótesis simplificadora

$$\bar{\mathbf{W}}^p = \mathbf{0} \quad (3.68)$$

Esta hipótesis presenta el inconveniente de dejar indefinida a falta de una rotación la configuración intermedia. Sin embargo en modelos isótropos, que son independientes de las rotaciones, dicha hipótesis no presenta problemas. La ley de endurecimiento (3.65) se puede expresar entonces:

$$\mathcal{L}_v^p \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{F}^e, \bar{\mathbf{q}}) \bar{\mathbf{D}}^p \quad (3.69)$$

3.6.5. Regla de flujo

A partir del potencial plástico (3.63), la dirección del flujo viene dada por una regla del tipo:

$$\bar{\mathbf{L}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{G}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{q}})}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \quad (3.70)$$

y empleando la hipótesis simplificadora expresada en (3.68), resulta:

$$\bar{\mathbf{D}}^p = \bar{\mathbf{L}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{G}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{q}})}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \quad (3.71)$$

3.6.6. Condiciones de carga y descarga. Condición de consistencia

Dado un estado tensional y unas variables internas asociadas al endurecimiento, de acuerdo con los valores que tome la función \bar{F} definida en (3.64), se pueden presentar dos situaciones:

1. $\bar{F}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{q}}) < 0$, con lo que $\bar{\mathbf{S}}$ está dentro del dominio elástico y el material se comporta elásticamente.
2. $\bar{F}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{q}}) = 0$, y $\bar{\mathbf{S}}$ está sobre la superficie de fluencia, pudiendo variar las deformaciones plásticas y las variables de endurecimiento. Este hecho se puede interpretar como una modificación de la configuración intermedia.

Por definición, la situación $\bar{F}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{q}}) > 0$ no es posible.

Considerando estas dos situaciones y de acuerdo con (3.71), se pueden establecer de forma general los siguientes estados de carga:

$$\bar{F}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{q}}) < 0 \Rightarrow \dot{\gamma} = 0 \quad (3.72)$$

$$\bar{F}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{q}}) = 0 \Rightarrow \dot{\gamma} \geq 0 \quad (3.73)$$

El problema que se plantea es determinar en que situaciones de (3.73) se tiene $\dot{\gamma} > 0$ (carga plástica) o $\dot{\gamma} = 0$ (descarga elástica). Esta cuestión queda expresada de forma compacta con las condiciones de Kuhn-Tucker, que se expresan:

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad \bar{F}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{q}}) \leq 0; \quad \text{y} \quad \dot{\gamma} \bar{F}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{q}}) = 0 \quad (3.74)$$

junto con la condición de consistencia plástica:

$$\bar{F}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{Q}}) = 0 \Rightarrow \dot{\gamma} \dot{\bar{F}}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{Q}}) = 0 \quad (3.75)$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker y la condición de consistencia plástica, que en su conjunto se denominan condiciones de carga-descarga, se pueden resumir de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F} < 0 \Leftrightarrow \dot{\gamma} = 0 \quad \text{carga elástica} \\ \bar{F} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{F}} < 0 \Leftrightarrow \dot{\gamma} = 0 \quad \text{descarga elástica} \\ \dot{\bar{F}} = 0 \text{ y } \dot{\gamma} = 0 \quad \text{carga neutra} \\ \dot{\bar{F}} = 0 \text{ y } \dot{\gamma} > 0 \quad \text{carga plástica} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.76)$$

Observación 3.6.2 Se excluye la posibilidad $\bar{F} = 0$ y $\dot{\bar{F}} > 0$, porque no tiene sentido. Desde un punto de vista intuitivo es fácil de justificar. Si en un determinado instante t se verifica $\dot{\bar{F}} > 0$, en $t + dt$ se puede presentar la situación $\bar{F} > 0$, que por definición no es posible. Una justificación rigurosa puede encontrarse en (Simó, 1994).

3.6.7. Tensor tangente elastoplástico

Realizando la derivada plástica de Lie del tensor $\bar{\mathbf{S}}$ en (3.60):

$$\mathcal{L}_v^p \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{C}}^e \bar{\mathbf{D}}^e \quad (3.77)$$

Observación 3.6.3 Para obtener la expresión (3.77) aparece como resultado intermedio:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E}^e)}{\partial \mathbf{E}^e} \quad (3.78)$$

y posteriormente se aplica la relación:

$$\phi_*^p \dot{\mathbf{E}}^e = \bar{\mathbf{D}}^e \quad (3.79)$$

Empleando la descomposición aditiva (3.49) del tensor velocidad de deformación plástica:

$$\mathcal{L}_v^p \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{C}}^e (\bar{\mathbf{D}} - \bar{\mathbf{D}}^p) \quad (3.80)$$

y sustituyendo la expresión de la regla de flujo (3.71):

$$\mathcal{L}_v^p \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{C}}^e \left(\bar{\mathbf{D}} - \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{G}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{q}})}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \right) \quad (3.81)$$

El multiplicador plástico $\dot{\gamma}$ se obtiene mediante la condición de consistencia plástica:

$$\dot{\bar{F}} = 0 \quad (3.82)$$

estando definida \bar{F} en (3.64). Operando:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \cdot \mathcal{L}_v^p \bar{\mathbf{S}} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \cdot \mathcal{L}_v^p \bar{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.83)$$

En esta expresión se sustituyen (3.81; 3.69; 3.71) y despejando $\dot{\gamma}$ resulta:

$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^e \bar{\mathbf{D}}}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^e \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} + H} \quad (3.84)$$

donde H es el módulo de endurecimiento isotrópico:

$$H = -\frac{1}{\dot{\gamma}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \cdot \mathcal{L}_v^p \bar{\mathbf{q}} \quad (3.85)$$

Finalmente, sustituyendo (3.84) en (3.81):

$$\mathcal{L}_v^p \bar{\mathbf{S}} = \left(\bar{\mathbf{C}}^e - \frac{\left(\bar{\mathbf{C}}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \right) \otimes \left(\bar{\mathbf{C}}^e \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \right)}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^e \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} + H} \right) \bar{\mathbf{D}} \quad (3.86)$$

De acuerdo con la expresión (3.86), se define el tensor tangente de módulos elastoplásticos como:

$$\bar{\mathbf{C}}^{ep} = \bar{\mathbf{C}}^e - \frac{\left(\bar{\mathbf{C}}^e \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \right) \otimes \left(\bar{\mathbf{C}}^e \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \right)}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^e \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} + H} \quad (3.87)$$

3.6.8. Expresión del modelo en la configuración deformada

La ecuaciones constitutivas definidas anteriormente en la configuración intermedia se expresan en la configuración deformada, ya que posteriormente el esquema de integración numérica se planteará en esta configuración.

1. La función de energía libre definida en la configuración intermedia:

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}^e(\bar{\mathbf{C}}) + \bar{\Psi}^p(\bar{\boldsymbol{\xi}}) = \bar{\Psi}^e(\bar{\mathbf{E}}) + \bar{\Psi}^p(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \quad (3.88)$$

se expresa en la configuración deformada mediante el push-forward elástico de sus argumentos, resultando:

$$\Psi^e = \Psi^e(\mathbf{F}^{eT} \mathbf{e}^e \mathbf{F}^e) = \Psi^e(\mathbf{e}^e, \mathbf{F}^e) \quad (3.89)$$

$$\Psi^p = \Psi^p(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.90)$$

2. El tensor de tensiones de Kirchhoff se obtiene a partir del push-forward elástico de (3.60):

$$\boldsymbol{\tau} = \phi_*^e \bar{\mathbf{S}} = \frac{\partial \Psi^e}{\partial \mathbf{e}^e} \quad (3.91)$$

3. El tensor elástico tangente se obtiene derivando en (3.91):

$$\mathbf{c}^e = \frac{\partial^2 \Psi^e}{\partial \mathbf{e}^e \partial \mathbf{e}^e} \quad (3.92)$$

4. Potencial plástico y función de fluencia

Como se ha comentado anteriormente, es necesario incluir \mathbf{F}^e en los argumentos del potencial plástico y de la función de fluencia para satisfacer el principio de equipresencia:

$$g = g(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}, \mathbf{F}^e) \quad (3.93)$$

$$f = f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}, \mathbf{F}^e) \quad (3.94)$$

Por otra parte se demuestra (Garino, 1993) que al imponer que $\dot{\gamma}$ sea igual en las configuraciones intermedia y deformada, si se verifica:

$$\bar{G}(\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{q}}) = g(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}, \mathbf{F}^e) \quad (3.95)$$

entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \phi_*^e \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{\mathbf{S}}} \quad (3.96)$$

Los mismos argumentos aplican a la función de fluencia f .

5. En la configuración deformada, el tensor tangente elastoplástico se obtiene a partir del push-forward elástico de (3.87):

$$\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} = \left(\mathbf{c}^e - \frac{(\mathbf{c}^e \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}) \otimes (\mathbf{c}^e \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}})}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{c}^e \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} + H} \right) \mathbf{d} \quad (3.97)$$

3.7. Integración de las ecuaciones de la plasticidad

Este apartado se dedica a los aspectos relevantes de la metodología de integración numérica del modelo constitutivo y su implementación computacional. En él se describe el método predictor-corrector en problemas de plasticidad con grandes deformaciones y los algoritmos empleados en este trabajo para el predictor elástico y el corrector plástico. A continuación se describe el algoritmo de retorno radial, y finalmente la formulación de la matriz elastoplástica tangente algorítmicamente consistente.

3.7.1. Introducción

Para integrar las ecuaciones de la plasticidad del modelo constitutivo descrito en el apartado anterior, el problema se discretiza mediante un parámetro t que tiene significado de pseudo-tiempo. Dado que no se consideran los efectos dinámicos, la variable t únicamente expresa la secuencia que sigue la historia de carga.

El problema que se plantea es el siguiente: dado un incremento de desplazamientos que define la configuración deformada en $t + \Delta t$:

$$\mathbf{u}_{\Delta t} : \Omega_t \rightarrow \Omega_{t+\Delta t} \quad (3.98)$$

y las configuraciones deformada e intermedia en el instante t :

$$\mathbf{F}_t^e, \quad \mathbf{F}_t^p, \quad \mathbf{F}_t \quad (3.99)$$

encontrar la configuración intermedia en $t + \Delta t$ y actualizar las variables internas. Las ecuaciones del problema elastoplástico que definen el problema elastoplástico a integrar con el algoritmo predictor-corrector son:

1. Descomposición aditiva del tensor velocidad de deformación:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p \quad (3.100)$$

2. Regla de flujo

$$\mathbf{d}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (3.101)$$

3. Ley de endurecimiento:

$$\mathcal{L}_v \mathbf{q} = \dot{\gamma} \mathbf{H} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (3.102)$$

3.7.2. Método Predictor-Corrector

Los algoritmos basados en este método integran las ecuaciones en dos pasos. Antes de describir los detalles de estos dos pasos en el contexto de la implementación computacional, es conveniente exponer brevemente la metodología y resultados obtenidos en cada uno de ellos:

1. Predictor elástico: en esta fase se calcula el tensor $\mathbf{d}_{t+\Delta t}$, a partir de la configuración intermedia del paso anterior que se denomina *configuración intermedia predictora*. Como dicha configuración intermedia permanece fija, en este paso las variables internas no cambian.
2. Corrector plástico: la configuración intermedia predictora se actualiza para obtener la configuración intermedia en $t + \Delta t$, manteniendo fija la configuración deformada. Asimismo se actualizan las variables internas.

Los resultados obtenidos en cada parte del método se resumen en el cuadro 3.1.

Problema elastoplástico	Predictor (elástico)	Corrector (plástico)
$\mathcal{L}_v \mathbf{e} = \mathbf{d}$	$\mathcal{L}_v \mathbf{e} = \mathbf{d}$	$\mathcal{L}_v \mathbf{e} = \mathbf{0}$
$\mathcal{L}_v \mathbf{e}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}}$	$\mathcal{L}_v \mathbf{e}^p = \mathbf{0}$	$\mathcal{L}_v \mathbf{e}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}}$
$\mathcal{L}_v \mathbf{q} = \dot{\gamma} H \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}}$	$\mathcal{L}_v \mathbf{q} = \mathbf{0}$	$\mathcal{L}_v \mathbf{q} = \dot{\gamma} H \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}}$

Cuadro 3.1: Método predictor-corrector en el problema elastoplástico con grandes deformaciones

3.7.3. Predictor elástico

Este paso se muestra de manera esquemática en la parte superior de la figura 3.3. Se conoce la solución convergida en el instante t , en la que se satisfacen simultáneamente las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones constitutivas. Los datos de partida son:

1. Configuraciones de referencia Ω_0 y deformada Ω_t
2. Gradiente de deformaciones $\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_t(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{F}}_t$
3. Inverso del tensor elástico de Finger $\mathbf{b}_t^{e-1} = \mathbf{F}_t^{e-T} \mathbf{F}_t^{e-1}$

Para un incremento de desplazamientos $\mathbf{u}_{\Delta t}$, que define la configuración deformada $\Omega_{t+\Delta t}$, con el predictor elástico se obtiene la configuración intermedia predictora $\bar{\Omega}_{t+\Delta t}^{\text{PR}}$:

$$\mathbf{F}_{t+\Delta t}^{\text{ePR}} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} \mathbf{F}_t^{p-1} \quad (3.103)$$

Operando esta expresión y definiendo el tensor gradiente incremental de deformaciones:

$$\mathbf{f}_{\Delta t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{x}_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{x}_t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} \mathbf{F}_t^{-1} \quad (3.104)$$

se obtiene:

$$\mathbf{F}_{t+\Delta t}^{\text{ePR}} = \mathbf{f}_{\Delta t} \mathbf{F}_t^e \quad (3.105)$$

Observación 3.7.1 Desde el punto de vista de la implementación, empleando elementos compatibles el gradiente incremental se puede evaluar con la expresión:

$$\mathbf{f}_{\Delta t} = \mathbf{1} + \frac{\partial \mathbf{u}_{\Delta t}}{\partial \mathbf{x}_t} \quad (3.106)$$

Sin embargo, con elementos de deformaciones supuestas, la expresión del gradiente incremental ha de contener la parte “mejorada”. La expresión más sencilla es la que se obtiene a partir de $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$ y \mathbf{F}_t aplicando directamente (3.104)

La configuración intermedia predictora se define de manera alternativa, no con el tensor $\mathbf{F}_{t+\Delta t}^{\text{ePR}}$ sino con el inverso del tensor predictor elástico de Finger:

$$\mathbf{b}_{t+\Delta t}^{\text{ePR}^{-1}} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{\text{ePR}^{-T}} \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{\text{ePR}^{-1}} = \mathbf{f}_{\Delta t}^{-T} \mathbf{b}_t^{\text{e}^{-1}} \mathbf{f}_{\Delta t}^{-1} \quad (3.107)$$

3.7.4. Corrector plástico

Este paso se muestra de manera esquemática en la parte inferior de la figura 3.3. Se parte de la configuración intermedia obtenida con el predictor elástico y de las variables internas calculadas en t .

Tal como se propone en (Simó, 1988b), la regla de flujo se integra en la configuración de referencia para verificar en cada incremento el principio de objetividad. De acuerdo con lo descrito en el apartado 3.5 y teniendo en cuenta que:

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}^p \quad (3.108)$$

la velocidad de deformación plástica y la componente plástica del tensor derecho de Cauchy-Green se relacionan mediante el operador pull-back:

$$\dot{\mathbf{C}}^p = 2\phi^* \mathbf{d}^p \quad (3.109)$$

Sustituyendo (3.101) en (3.109):

$$\dot{\mathbf{C}}^p = 2\dot{\gamma} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{S}} \quad (3.110)$$

siendo G la función potencial plástico en la configuración de referencia. La ecuación (3.110) se integra con el esquema de Euler implícito, y resulta:

$$\mathbf{C}_{t+\Delta t}^p = \mathbf{C}_t^p + 2\Delta\gamma \frac{\partial G_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{S}} \quad (3.111)$$

El operador push-forward se aplica a la expresión (3.111) para expresarla en la configuración deformada:

$$\phi_* \mathbf{C}_{t+\Delta t}^p = \phi_* \mathbf{C}_t^p + 2\Delta\gamma \frac{\partial g_{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (3.112)$$

La componente plástica del tensor de Cauchy-Green, en t y en $t + \Delta t$, se expresan:

$$\begin{aligned} \phi_* \mathbf{C}_{t+\Delta t}^p &= \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{-T} \mathbf{C}_{t+\Delta t}^p \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{-1} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{e-T} \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{p-T} \mathbf{C}_{t+\Delta t}^p \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{p-1} \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{e-1} \\ &= \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{e-T} \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{e-1} = \mathbf{b}_{t+\Delta t}^{e-1} \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} \phi_* \mathbf{C}_t^p &= \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{-T} \mathbf{C}_t^p \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{-1} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{-T} \mathbf{F}_t^{pT} \mathbf{F}_t^p \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{-1} \\ &= \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{-T} \left(\mathbf{F}_t^{e-1} \mathbf{F}_t \right)^T \left(\mathbf{F}_t^{e-1} \mathbf{F}_t \right) \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{-1} \\ &= \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{-T} \mathbf{F}_t^T \mathbf{F}_t^{e-T} \mathbf{F}_t^{e-1} \mathbf{F}_t \mathbf{F}_{t+\Delta t}^{-1} = \mathbf{f}_{\Delta t}^{-T} \mathbf{b}_t^{e-1} \mathbf{f}_{\Delta t}^{-1} = \mathbf{b}_{t+\Delta t}^{ePR-1} \end{aligned} \quad (3.114)$$

Sustituyendo (3.113; 3.114) en (3.112), resulta finalmente como expresión del corrector plástico:

$$\mathbf{b}_{t+\Delta t}^{e-1} = \mathbf{b}_{t+\Delta t}^{ePR-1} + 2\Delta\gamma \frac{\partial g_{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (3.115)$$

Con el valor de $\mathbf{b}_{t+\Delta t}^{ePR-1}$ que se obtuvo con el predictor elástico, la configuración intermedia queda determinada mediante $\mathbf{b}_{t+\Delta t}^{e-1}$ en la expresión (3.115), a falta del valor de $\Delta\gamma$. Dicho valor se obtiene mediante algún algoritmo de retorno a la superficie de fluencia. Una revisión rigurosa de los distintos métodos de retorno es la descrita en (Simó y Hughes, 1991; Simó, 1994). En este trabajo se ha empleado el algoritmo de retorno radial, que sirve para la plasticidad de Von-Mises y es el más sencillo de los denominados “algoritmos de retorno mapeado” (Simó, 1994).

3.7.5. Algoritmo de retorno (Euler implícito)

Los algoritmos de retorno tiene por objeto devolver a la superficie de fluencia $f = 0$ el estado tensional predictor $\boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t}^{PR}$ calculado mediante (3.91), cuando $f_t(\boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t}^{PR}) > 0$. Al mismo tiempo se obtiene la nueva superficie de fluencia $f_{t+\Delta t}$ mediante el multiplicador plástico $\Delta\gamma$. En este trabajo la plasticidad con grandes deformaciones se restringe al modelo de Von-Mises. Dado que la superficie de fluencia tiene simetría de revolución, dentro de la “familia de algoritmos de retorno” es aplicable el *algoritmo de retorno radial*. Se supone que la dirección de flujo plástico es constante, es decir:

$$\frac{\partial g_{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial g_{t+\Delta t}^{PR}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (3.116)$$

Como el modelo de Von Mises es asociativo, la superficie de fluencia y el potencial plástico coinciden ($f = g$), con lo que la normal a la superficie de

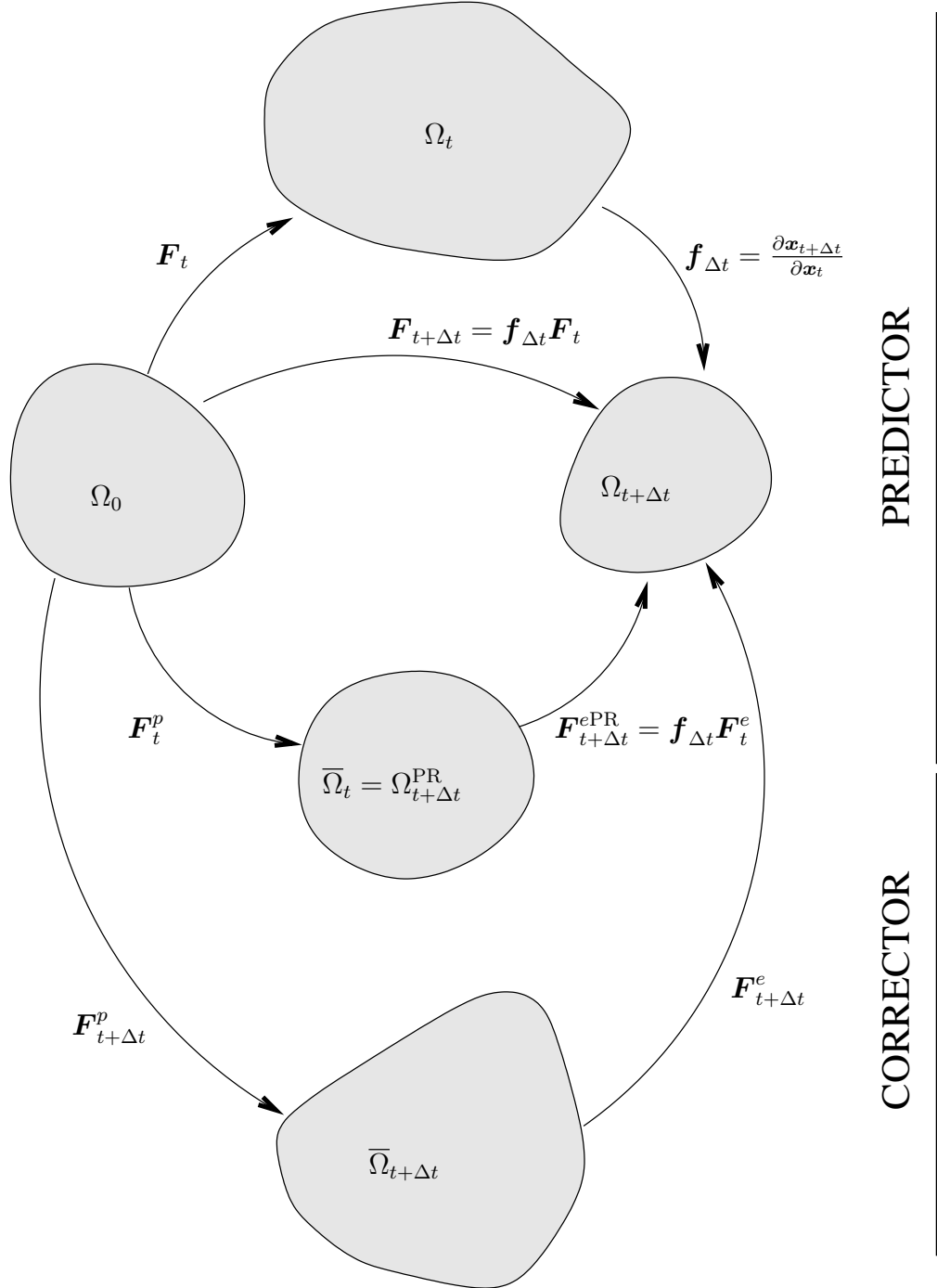


Figura 3.3: Algoritmo predictor-corrector aplicado al problema elastoplástico con grandes deformaciones

fluencia lleva la dirección del flujo plástico:

$$\mathbf{n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right\|} = \frac{\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}}}{\left\| \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right\|} \quad (3.117)$$

En el caso particular de la plasticidad de Von Mises se verifica:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \quad (3.118)$$

donde \mathbf{s} es la parte desviadora del tensor de tensiones de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$. Una vez calculado el tensor de tensiones predictor, suponiendo el material en régimen elástico, las tensiones desviadoras “retornadas” se expresan en términos de las tensiones desviadoras mediante el multiplicador plástico $\Delta\gamma$:

$$\mathbf{s}_{t+\Delta t} = \mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - 2\mu\Delta\gamma\mathbf{n}_{t+\Delta t} \quad (3.119)$$

Sustituyendo (3.118) en (3.119), se obtiene la ecuación escalar:

$$\|\mathbf{s}_{t+\Delta t}\| = \|\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}}\| - 2\mu\Delta\gamma \quad (3.120)$$

que es la que se resuelve junto a la ecuación de consistencia:

$$\|\mathbf{s}_{t+\Delta t}\| = \sqrt{\frac{2}{3}}Y_{t+\Delta t}(\xi) \quad (3.121)$$

para obtener el multiplicador plástico. En la figura 3.4 se muestra esquemáticamente el proceso de retorno radial.

Observación 3.7.2 *El modelo de plasticidad de Von Mises depende de una sola variable interna plástica ξ . Entre esta variable interna y el multiplicador plástico se establece la relación:*

$$\dot{\xi} = \sqrt{\frac{2}{3}}\dot{\gamma} \quad (3.122)$$

y de esta forma ξ coincide con la denominada deformación plástica efectiva (Hill, 1950).

Observación 3.7.3 *La ecuación (3.120), si el módulo de endurecimiento es constante, tiene solución cerrada. En el caso general resulta una ecuación no lineal que hay que resolver iterativamente. Estos dos casos se detallan a continuación en sendos ejemplos.*

Ejemplo 3.2 (Endurecimiento constante) *Si el módulo de endurecimiento es constante de valor H , la condición de consistencia (3.121) se expresa:*

$$\|\mathbf{s}_{t+\Delta t}\| = \sqrt{\frac{2}{3}}(Y_0 + H\xi_{t+\Delta t}) \quad (3.123)$$

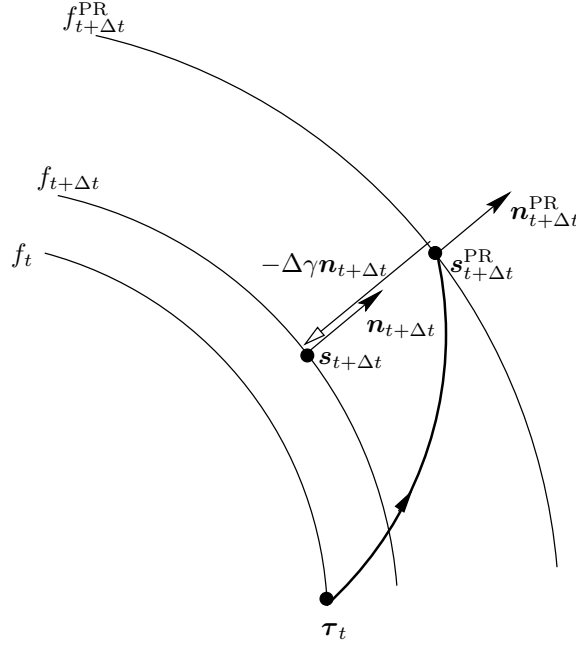


Figura 3.4: Algoritmo de retorno radial

Sustituyendo en esta ecuación, la expresión incremental de (3.122):

$$\xi_{t+\Delta t} = \xi_t + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \quad (3.124)$$

y operando, resulta finalmente:

$$\Delta\gamma = \frac{\|s_{t+\Delta t}\|^{PR} - \sqrt{\frac{2}{3}} Y_t}{2\mu + \frac{2}{3}H} \quad (3.125)$$

En este resultado se puede observar que el numerador es precisamente el valor predictor de la superficie de fluencia.

Ejemplo 3.3 (Endurecimiento no lineal) En el caso más general, si la ley de endurecimiento es de tipo no lineal:

$$Y = Y(\xi) \quad (3.126)$$

se debe resolver la ecuación no lineal:

$$\|s_{t+\Delta t}\|^{PR} - 2\mu\Delta\gamma - \sqrt{\frac{2}{3}} Y_{t+\Delta t}(\Delta\gamma) = 0 \quad (3.127)$$

en la que se ha expresado la deformación plástica efectiva ξ en función de $\Delta\gamma$ a través de (3.124). Esta ecuación se puede resolver mediante un algoritmo de Newton-Raphson definiendo el residuo:

$$r(\Delta\gamma) = \|s_{t+\Delta t}\|^{PR} - 2\mu\Delta\gamma - \sqrt{\frac{2}{3}} Y_{t+\Delta t}(\Delta\gamma) \quad (3.128)$$

y el esquema iterativo:

$$\Delta\gamma_{k+1} = \Delta\gamma_k - \frac{r(\Delta\gamma_k)}{r'(\Delta\gamma_k)} \quad (3.129)$$

3.7.6. Tensor tangente elastoplástico consistente

Aunque puede parecer razonable emplear en la integración numérica del modelo el tensor tangente elastoplástico definido en la expresión (3.97), no lo es porque con él se pierde la tasa de convergencia cuadrática del método de Newton-Raphson. Por esta razón, se propone (Simó y Taylor, 1985) el uso de un tensor elastoplástico tangente que es algorítmicamente consistente con el algoritmo de integración discreto de las ecuaciones constitutivas. La idea clave para obtener el tensor algorítmicamente consistente es imponer la condición de consistencia plástica en la formulación del algoritmo numérico en lugar de hacerlo en la formulación para el tiempo continuo. En este apartado se deduce, a partir de los desarrollos de la referencia anteriormente citada, la expresión del tensor tangente consistente para el modelo constitutivo descrito en este capítulo.

Sea \mathbf{c}^e el tensor tangente de módulos elásticos, en $t + \Delta t$, referido a la configuración deformada. De acuerdo con el algoritmo de retorno descrito en el apartado 3.7.5, la expresión de las tensiones de Kirchhoff en $t + \Delta t$ es (Garino, 1993):

$$\boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - \Delta\gamma \mathbf{c}^e \frac{\partial g_{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t}} \quad (3.130)$$

Mediante el pull-back a la configuración de referencia se obtiene la expresión material de (3.130):

$$\mathbf{S}_{t+\Delta t} = \mathbf{S}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - \Delta\gamma \mathbf{C}^e \frac{\partial G_{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t}} \quad (3.131)$$

Derivando esta expresión respecto del tiempo:

$$\dot{\mathbf{S}}_{t+\Delta t} = \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{E}}_{t+\Delta t} - \Delta\dot{\gamma} \mathbf{C}^e \frac{\partial G_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{S}} - \Delta\gamma \mathbf{C}^e \frac{\partial^2 G_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{S}} \dot{\mathbf{S}}_{t+\Delta t} \quad (3.132)$$

y despejando $\dot{\mathbf{S}}$:

$$\dot{\mathbf{S}}_{t+\Delta t} = \left((\mathbf{C}^e)^{-1} + \Delta\gamma \frac{\partial^2 G_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{S}} \right)^{-1} \left(\dot{\mathbf{E}}_{t+\Delta t} - \Delta\dot{\gamma} \frac{\partial G_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{S}} \right) \quad (3.133)$$

Haciendo el pull-back plástico de los argumentos de la función de fluencia \bar{F} definida en (3.64), se obtiene la expresión de la función de fluencia F en la configuración material. Si se sustituye la ley de endurecimiento isotrópico $Y = Y(\xi)$, en la condición de consistencia algorítmica $\dot{F}_{t+\Delta t} = 0$, resulta:

$$\frac{\partial F_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{S}} \cdot \dot{\mathbf{S}}_{t+\Delta t} - H_{t+\Delta t} \Delta\dot{\gamma} = 0 \quad (3.134)$$

siendo $H(\xi)$ el módulo tangente de endurecimiento isotrópico:

$$H_{t+\Delta t} = \frac{dY_{t+\Delta t}}{d\xi} \quad (3.135)$$

Al sustituir (3.133) en (3.134) y despejar $\Delta\dot{\gamma}$ resulta:

$$\Delta\dot{\gamma} = \frac{\mathbf{C}^{e*} \frac{\partial F_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{S}}}{\frac{\partial F_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}^{e*} \frac{\partial G_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{S}} + H_{t+\Delta t}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{t+\Delta t} \quad (3.136)$$

donde \mathbf{C}^{e*} el tensor tangente de módulos elásticos “modificado”:

$$\mathbf{C}^{e*} = \left((\mathbf{C}^e)^{-1} + \Delta\gamma \frac{\partial^2 G_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{S}} \right)^{-1} \quad (3.137)$$

Finalmente, sustituyendo (3.136; 3.137) en (3.133) y factorizando, resulta:

$$\dot{\mathbf{S}}_{t+\Delta t} = \left(\mathbf{C}^{e*} - \frac{\left(\mathbf{C}^{e*} \frac{\partial F_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{S}} \right) \otimes \left(\mathbf{C}^{e*} \frac{\partial G_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{S}} \right)}{\frac{\partial F_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}^{e*} \frac{\partial G_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{S}} + H_{t+\Delta t}} \right) \dot{\mathbf{E}}_{t+\Delta t} \quad (3.138)$$

El operador entre los paréntesis exteriores define el denominado *tensor tangente algorítmicamente consistente*, $\hat{\mathbf{C}}^{ep}$, resultando:

$$\dot{\mathbf{S}}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{C}}^{ep} \dot{\mathbf{E}}_{t+\Delta t} \quad (3.139)$$

Haciendo el push-forward de $\hat{\mathbf{C}}^{ep}$ se obtiene el tensor elastoplástico consistente en la configuración deformada:

$$\hat{\mathbf{c}}^{ep} = \mathbf{c}^{e*} - \frac{\left(\mathbf{c}^{e*} \frac{\partial f_{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \otimes \left(\mathbf{c}^{e*} \frac{\partial g_{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right)}{\frac{\partial f_{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{c}^{e*} \frac{\partial g_{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{\tau}} + H_{t+\Delta t}} \quad (3.140)$$

siendo en este caso el tensor elástico modificado:

$$\mathbf{c}^{e*} = \left((\mathbf{c}^e)^{-1} + \Delta\gamma \frac{\partial^2 g_{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial \boldsymbol{\tau}} \right)^{-1} \quad (3.141)$$

La expresión que relaciona de forma tangente las tensiones y deformaciones es:

$$\mathcal{L}_v(\boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t}) = \hat{\mathbf{c}}^{ep} \mathbf{d}_{t+\Delta t} \quad (3.142)$$

Observación 3.7.4 Si se desprecia la variación de la función de fluencia f con el tensor métrico \mathbf{g} , como se ha hecho en este trabajo, la expresión que resulta es idéntica a la que se obtiene en el caso de pequeñas deformaciones. El término asociado a la variación de f con \mathbf{g} da lugar a que el tensor pierda la simetría incluso en modelos asociativos (Garino, 1993).

Observación 3.7.5 Empleando la matriz consistente, el tensor elástico \mathbf{c}^{e*} se ve afectado por el flujo plástico (ecuación (3.141))

3.8. Aspectos computacionales

En este apartado se describe el esquema de implementación computacional del modelo constitutivo descrito, en el contexto de los elementos con deformaciones supuestas formulados en el capítulo 2.

Se supone conocida la solución convergida en el paso t y el campo de desplazamientos en el paso actual $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$. Asimismo se conocen los siguientes valores:

- Base de datos

Están almacenadas las siguientes variables correspondientes al paso t :

1. Inverso del Tensor Elástico de Finger \mathbf{b}_t^{e-1}
2. Gradiente de deformaciones \mathbf{F}_t
3. Amplitudes de los modos mejorados $\mathbf{\Gamma}_t$
4. Deformación plástica efectiva ξ_t

- Cálculos efectuados en la rutina del elemento (ver apartado 2.4.7) en $t + \Delta t$ antes de llamar al modelo constitutivo:

1. Gradiente de deformaciones $\mathbf{F}_{t+\Delta t} = \mathbf{1} + \nabla_X \boldsymbol{\varphi}_{t+\Delta t} + \tilde{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}$
2. Gradiente incremental de deformaciones $\mathbf{f}_{\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} \mathbf{F}_t^{-1}$

A partir de estos datos, en la rutina del modelo constitutivo se efectúan los cálculos que se describen en el cuadro 3.2

Observación 3.8.1 Desde el punto de vista computacional un atractivo importante del modelo constitutivo, solucionado con elementos mixtos, es la sencillez de su implementación (Garino, 1993). Es importante destacar, que este atractivo se mantiene en el contexto de los elementos con deformaciones supuestas.

Observación 3.8.2 Otros autores (Roehl y Ramm, 1996) han implementado un modelo similar a este. No obstante, se pueden matizar ciertas diferencias:

1. El modelo de (Roehl y Ramm, 1996) se formula explícitamente con el tensor modificado de Finger, obtenido con la parte desviadora del gradiente de deformaciones. En consecuencia, para flujo plástico incompresible, los resultados obtenidos con ambos modelos son prácticamente los mismos.
2. El predictor del tensor elástico de Finger se obtiene a partir de la componente plástica del tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C}_t^p . Esta formulación es totalmente equivalente desde el punto de vista numérico a la que aquí se propone. No obstante, al no emplear el gradiente incremental $\mathbf{f}_{\Delta t}$ se pierde el atractivo de la interpretación intuitiva en que la configuración intermedia predictora $\bar{\Omega}_{t+\Delta t}^{PR}$ se obtiene a partir de la configuración deformada $\Omega_{t+\Delta t}$ mediante $\mathbf{f}_{\Delta t} \mathbf{F}_t^e$ (ver figura 3.3).

1. Predictor elástico

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{t+\Delta t}^{ePR^{-1}} &= \mathbf{f}_{\Delta t}^{-T} \mathbf{b}_t^{e^{-1}} \mathbf{f}_{\Delta t}^{-1} \\ \mathbf{e}_{t+\Delta t}^{ePR} &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{b}_{t+\Delta t}^{ePR^{-1}}) \\ \boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t}^{ePR} &= \frac{\partial W(\mathbf{e}_{t+\Delta t}^{ePR})}{\partial \mathbf{e}} \end{aligned}$$

2. Criterio de fluencia

- Si $f(\boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t}^{ePR}, Y_t) \leq 0 \rightarrow$ ESTADO ELÁSTICO
 - a) IR a 3 (los resultados del predictor elástico son correctos)
- Si $f(\boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t}^{ePR}, Y_t) > 0 \rightarrow$ CORRECTOR PLÁSTICO
 - a) Cálculo del multiplicador plástico $\Delta\gamma$ mediante el algoritmo de RETORNO RADIAL (Ver apartado 3.7)
 - b) Corrección del tensor elástico de Finger y actualizaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{t+\Delta t}^{e^{-1}} &= \mathbf{b}_{t+\Delta t}^{ePR^{-1}} + 2\Delta\gamma \mathbf{n}_{t+\Delta t} \\ \xi_{t+\Delta t} &= \xi_t + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma \\ \boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t} &= \boldsymbol{\tau}_{t+\Delta t}^{ePR} - 2\mu\Delta\gamma \mathbf{n}_{t+\Delta t} \end{aligned}$$

c) IR a 3

- 3. Actualización de la base de datos: $\mathbf{b}_{t+\Delta t}^{e^{-1}}, \xi_{t+\Delta t}$
- 4. Cálculo del tensor constitutivo consistente (Ver apartado 3.7)

Cuadro 3.2: Implementación computacional del modelo constitutivo

3.9. Ejemplos de validación

3.9.1. Probeta con doble entalla

Este ejemplo ha sido analizado en (Nagtegaal et al., 1974) para pequeñas deformaciones y posteriormente en (Simó y Armero, 1993) empleando elementos formulados para grandes deformaciones. Se trata de una probeta de ancho $W = 10$ y longitud $L = 30$ con dos entallas de longitud $b = 4$ cada una, dispuestas como se indica en la figura 3.5. Por las condiciones de simetría existentes se modeliza la cuarta parte de la probeta, empleando 15×5 elementos. Las constantes elásticas son $E = 206,9$ y $\nu = 0,29$. Se considera plasticidad perfecta con una tensión de fluencia $Y = 0,45$.

El análisis se lleva a cabo con desplazamientos impuestos en los bordes paralelos a las entallas, hasta alcanzar un valor $u = 0,25$. En la figura 3.5 se muestra la deformada de la probeta completa. Las curvas fuerza-desplazamiento se muestran en la figura 3.6 para los elementos $Q4$, $Q1/P0$, $Q1/E4$, $Q1/ES4$ y $Q1/ET4$ desarrollados en este trabajo, y los obtenidos

en ([Simó y Armero, 1993](#)) para el elemento mejorado con la formulación original. En esta curva se puede comprobar que con los elementos mejorados la carga alcanza un valor límite muy similar a la obtenida con el elemento de presión constante. Debido a los efectos geoméricamente no lineales, salvo en el elemento con formulación en desplazamientos $Q4$, en todos los elementos la carga es decreciente a partir de un cierto valor.

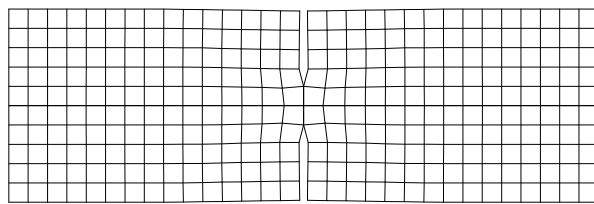


Figura 3.5: Probeta con doble entalla. Deformada

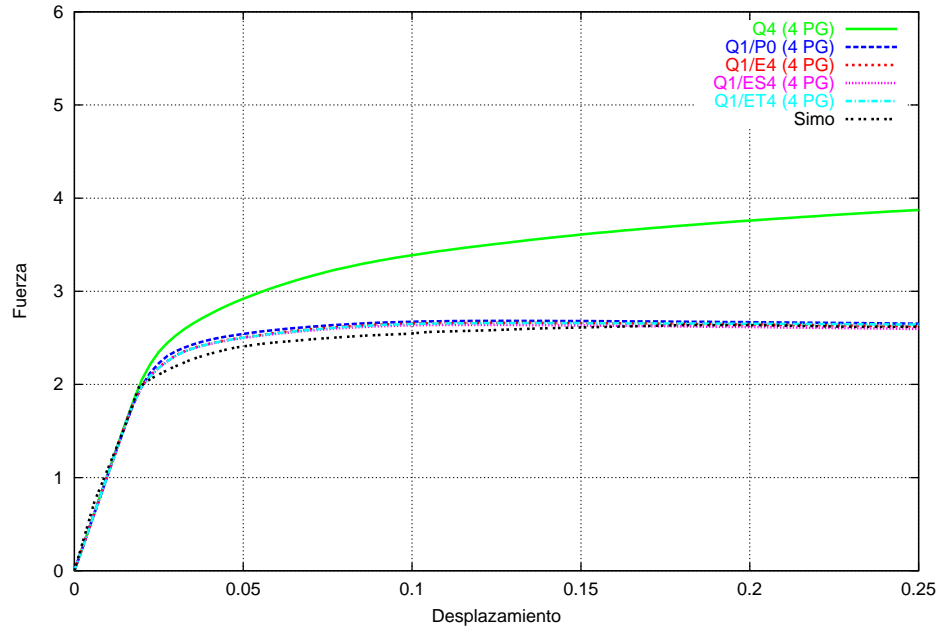


Figura 3.6: *Probeta con doble entalla. Curva Fuerza-Desplazamiento*

3.9.2. Ménsula elastoplástica en deformación plana

Este es un ejemplo de tipo académico, propuesto en el marco del proyecto GRECO, que ha sido resuelto por diversos centros de investigación, y que se ha empleado como ejemplo de validación en diversas tesis doctorales (Garino, 1993; Ponthot, 1994). En él se analiza el comportamiento de una ménsula de espesor no despreciable, bajo el desplazamiento impuesto de un nodo del extremo libre, hasta alcanzar un descenso igual al canto de la viga. En la figura 3.7 se muestra la definición del problema y la discretización empleada.

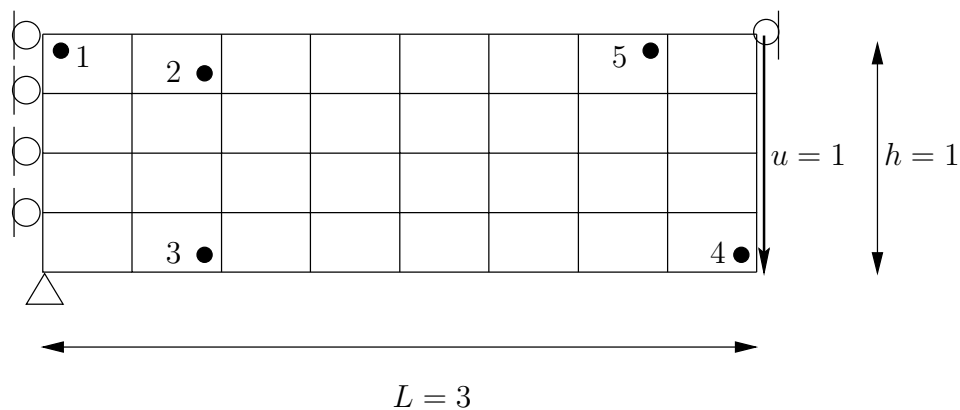


Figura 3.7: *Ménsula elastoplástica en deformación plana. Definición del problema*

Se considera un material elastoplástico con tensión de fluencia $Y = 40$ y módulo de endurecimiento constante $H = 100$. Las constantes elásticas son $E = 20000$ y $\nu = 0,3$.

El problema se ha resuelto con cuatro puntos de integración empleando el modelo constitutivo descrito en este capítulo con los elementos $Q1/E4$, $Q1/ES4$, $Q1/ET4$ y el elemento mixto de presión constante $Q1/P0$ formulado en (Garino, 1993). Asimismo se recogen los resultados obtenidos con los elementos mejorados de un programa comercial (ABAQUS, 1994), que emplea una formulación hipoelástica basada en la tasa de Jaumann. También se muestran los resultados de NIKE2D (Engelman y Hallquist, 1991) con elementos \bar{B} y formulación hipoelástica basada en la tasa de Green-Naghdi.

Las deformadas obtenidas son muy similares en todos los casos, y en la figura 3.8 se muestra la obtenida con el elemento $Q1/E4$, así como los contornos de deformación plástica efectiva. También es muy similar en todos los elementos la curva fuerza-desplazamiento que puede observarse en la figura 3.9. Por otra parte, esta curva es prácticamente idéntica a la obtenida en (Ponthot, 1994).

No obstante, en los resultados correspondientes a las tensiones y a la deformación plástica efectiva en los cinco puntos de Gauss de la figura 3.7, aparecen algunas diferencias importantes. El interés de estos puntos es que recogen distintas situaciones de deformación y rotación: el punto 1 tiene grandes deformaciones y pequeñas rotaciones, los puntos 2 y 3 grandes deformaciones y rotaciones moderadas, el punto 4 pequeñas deformaciones (debe permanecer en estado elástico) y grandes rotaciones, y el punto 5 grandes deformaciones y rotaciones. Los valores obtenidos se muestran en los cuadros 3.3 y 3.4. Del cuadro 3.3 se concluye que, aunque los valores de la deformación plástica efectiva son muy parecidos, las diferencias en tensiones son muy significativas en los puntos 2 y 3. La diferencia en estos resultados se debe al valor de la presión, que en el modelo constitutivo no juega ningún papel para los estados de carga plástica. Asimismo, es necesario tener en cuenta que en los elementos de NIKE2D y en $Q1/P0$, la presión es una variable que se suaviza promediándola en el centroide del elemento. En el cuadro 3.4 se comparan las tensiones desviadoras y la presión, confirmándose que aquellas resultan similares para todos los elementos.

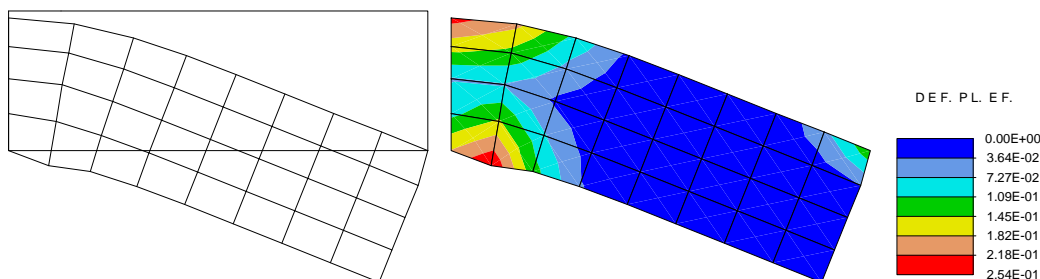


Figura 3.8: *Ménsula elastoplástica en deformación plana. Deformada y contornos de deformación plástica efectiva al final del proceso de carga*

PUNTO	Elemento	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}	σ_{xy}	ξ
1	$Q1/E4$	69,31	-4,20	32,51	-7,44	0,250
	$Q1/ES4$	64,16	-9,79	27,17	-6,94	0,252
	$Q1/ET4$	62,68	-10,96	25,87	-7,50	0,251
	ABAQUS	58,71	-2,59	28,04	-6,57	0,286
	$Q1/P0$	66,99	-3,00	31,50	-10,03	0,231
	NIKE-2D	67,30	-3,02	31,60	-10,10	0,232
2	$Q1/E4$	48,64	2,73	25,66	-15,99	0,085
	$Q1/ES4$	37,09	-9,21	13,99	-15,71	0,085
	$Q1/ET4$	33,84	-13,23	10,37	-15,08	0,084
	ABAQUS	49,11	4,13	26,59	-13,46	0,108
	$Q1/P0$	54,06	4,22	28,40	-14,81	0,102
	NIKE-2D	54,30	4,27	28,50	-14,90	0,103
3	$Q1/E4$	-76,12	-13,53	-44,60	9,60	0,167
	$Q1/ES4$	-38,74	25,64	-6,57	7,22	0,171
	$Q1/ET4$	-34,45	30,35	-2,00	6,52	0,172
	ABAQUS	-46,73	-0,84	-23,58	9,91	0,066
	$Q1/P0$	-57,30	-3,08	-20,82	20,39	0,109
	NIKE-2D	-57,30	-2,96	-20,70	20,40	0,194
4	$Q1/E4$	-9,12	-1,38	-3,15	-3,53	0,000
	$Q1/ES4$	-8,64	-1,25	-2,97	-3,32	0,000
	$Q1/ET4$	-8,34	-1,20	-2,86	-3,25	0,000
	ABAQUS	-8,52	-1,41	-2,98	-3,58	0,000
	$Q1/P0$	-7,58	-0,62	-1,96	-2,92	0,000
	NIKE-2D	-7,52	-1,21	-1,39	-1,37	0,000
5	$Q1/E4$	29,38	20,23	18,48	-8,51	0,013
	$Q1/ES4$	31,66	25,32	21,43	-7,58	0,015
	$Q1/ET4$	33,81	29,95	24,13	-6,79	0,016
	ABAQUS	24,54	15,26	15,16	-8,23	0,012
	$Q1/P0$	23,29	35,48	5,20	-9,96	0,017
	NIKE-2D	26,40	27,60	10,10	2,22	0,020

Cuadro 3.3: *Ménsula elastoplástica en deformación plana. Tensiones y deformación plástica efectiva en los puntos de Gauss seleccionados*

PUNTO	Elemento	s_{xx}	s_{yy}	s_{zz}	p
1	$Q1/E4$	36,77	-36,74	-0,03	32,54
	$Q1/ES4$	36,98	-36,97	-0,01	27,18
	$Q1/ET4$	36,82	-36,82	-0,01	25,86
	ABAQUS	30,66	-30,64	-0,02	28,05
	$Q1/P0$	35,16	-34,83	-0,33	31,83
	NIKE-2D	35,34	-34,99	-0,37	31,96
2	$Q1/E4$	22,96	-22,94	-0,03	25,68
	$Q1/ES4$	23,14	-23,17	-0,01	13,96
	$Q1/ET4$	23,51	-23,55	-0,01	10,32
	ABAQUS	22,50	-22,48	-0,02	26,61
	$Q1/P0$	25,17	-24,67	-0,33	25,89
	NIKE-2D	25,28	-24,75	-0,52	29,02
3	$Q1/E4$	-31,37	31,22	0,15	-44,75
	$Q1/ES4$	-32,18	32,19	-0,01	-6,56
	$Q1/ET4$	-32,42	32,38	0,03	-2,03
	ABAQUS	-23,26	22,62	-0,11	-23,46
	$Q1/P0$	-30,23	23,98	6,25	-27,07
	NIKE-2D	-30,31	24,03	6,29	-26,99
4	$Q1/E4$	-4,57	3,17	1,40	-4,55
	$Q1/ES4$	-4,35	3,03	1,32	-4,28
	$Q1/ET4$	-4,21	2,94	1,27	-4,14
	ABAQUS	-4,22	2,89	1,32	-4,30
	$Q1/P0$	-4,19	2,77	1,43	-3,39
	NIKE-2D	-4,15	2,16	1,98	-3,37
5	$Q1/E4$	6,68	-2,47	-4,22	22,70
	$Q1/ES4$	5,52	-0,82	-4,71	26,14
	$Q1/ET4$	4,51	0,65	-5,17	29,30
	ABAQUS	6,22	-3,06	-3,16	18,32
	$Q1/P0$	1,97	14,16	-11,27	21,32
	NIKE-2D	5,03	6,23	1,98	21,37

Cuadro 3.4: *Ménsula elastoplástica en deformación plana. Tensiones efectivas y presión en los puntos de Gauss seleccionados*

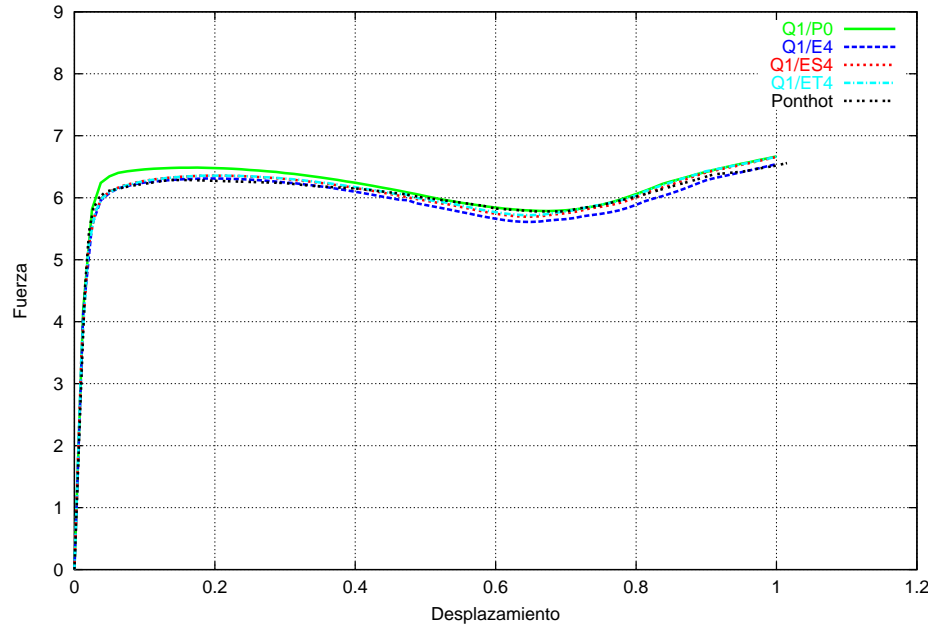


Figura 3.9: *Ménsula elastoplástica en deformación plana. Curva Fuerza-Desplazamiento*

3.9.3. Viga biempotrada con grandes deformaciones

En este ejemplo se analiza una viga biempotrada, con un desplazamiento impuesto en su sección central de valor el doble del canto. Este ejemplo ha sido analizado en (Jetteur y Cescotto, 1991; Ponthot, 1994). Las dimensiones de la viga son 6×1 modelizándose la mitad por razones de simetría. Las propiedades constitutivas son idénticas a las del ejemplo anterior y la malla se discretiza con 24×8 elementos. Los elementos utilizados son los $Q1/P0$ y $Q1/E4$, implementados por el autor en FEAP. En la figura 3.10 se muestra la deformada y los contornos de deformación plástica efectiva obtenidos, que alcanzan un valor del 73,4%. Puede observarse como dichos contornos respetan la simetría central que tiene el problema.

En la figura 3.11 se muestran las curvas fuerza - desplazamiento que se han obtenido en este trabajo, con los dos tipos de elementos empleados, y las obtenidas en los dos trabajos anteriormente referenciados. Como puede observarse, la comparación de resultados entre unos y otros trabajos son excelentes.

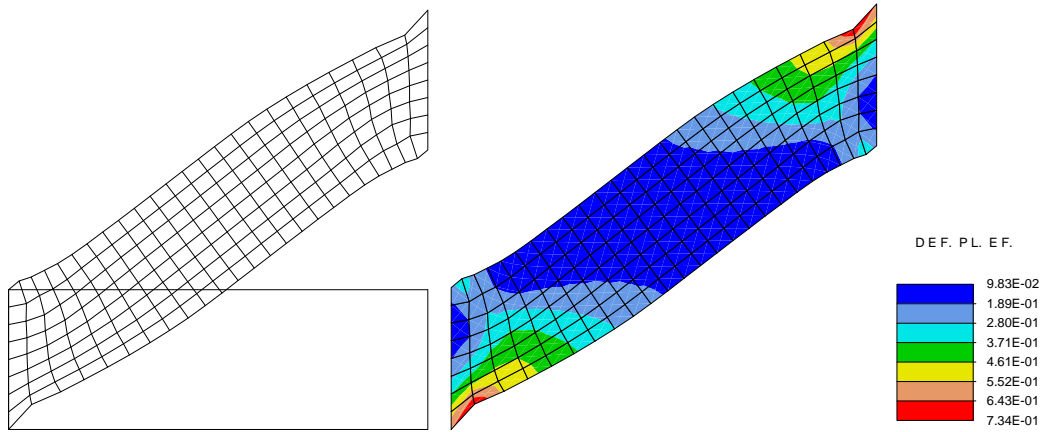


Figura 3.10: *Viga biempotrada. Deformada y contornos de deformación plástica efectiva al final del proceso de carga*

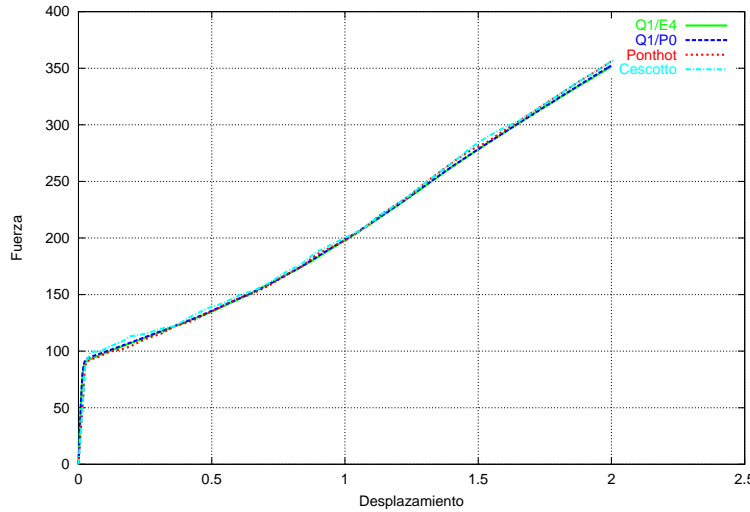


Figura 3.11: *Viga biempotrada. Curva Fuerza-Desplazamiento*

3.9.4. Cilindro de pared gruesa con presión interna

En este ejemplo y en el siguiente se emplean los elementos mejorados con la formulación axilsimétrica descrita en el apartado 2.4.6.

Sea un cilindro de radio interno a y radio externo b , y de longitud indefinida, sometido a presión interna p . Se considera un material de Von-Mises con plasticidad perfecta. Sea c ($a \leq c \leq b$) el radio que separa la zona plástica de la zona elástica, G el módulo de corte e Y la tensión de fluencia uniaxial. En el caso incompresible, este problema tiene la solución analítica (Lubliner, 1990) que se resume a continuación:

- Presión interna p

$$p = \frac{Y}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{c^2}{b^2} - \log \frac{c^2}{a^2} \right) \quad (3.143)$$

■ Distribución de tensiones

• Zona plástica ($r \leq c$)

$$\sigma_r(r) = -\frac{Y}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{c^2}{b^2} + \log \frac{c^2}{r^2} \right) \quad (3.144)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{Y}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{c^2}{b^2} - \log \frac{c^2}{r^2} \right) \quad (3.145)$$

$$\sigma_z(r) = \frac{Y}{\sqrt{3}} \left(\frac{c^2}{b^2} - \log \frac{c^2}{r^2} \right) \quad (3.146)$$

$$(3.147)$$

• Zona elástica ($r \geq c$)

$$\sigma_r(r) = -\frac{Y}{\sqrt{3}} \left(\frac{c^2}{r^2} - \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (3.148)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{Y}{\sqrt{3}} \left(\frac{c^2}{r^2} + \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (3.149)$$

$$\sigma_z = \frac{Y}{\sqrt{3}} \frac{c^2}{b^2} \quad (3.150)$$

■ Desplazamientos radiales:

$$u_r(r) = \frac{Y}{\sqrt{3}} \frac{c^2}{2Gr} \quad (3.151)$$

La solución de elementos finitos se obtiene tomando las dimensiones $a = 40$ y $b = 80$, para una rebanada de altura $h = 2$. Las propiedades elásticas son $E = 3,0$, $\nu = 0,4999$. El material se considera perfectamente elastoplástico con tensión de fluencia $Y/\sqrt{3}G = 0,003$. El análisis se efectúa con control de cargas con una presión calculada tomando $c = 60$ en (3.143). De esta manera, la separación entre la zona elástica y la zona plástica está exactamente en la mitad de la pared cilíndrica. Se han considerado tres mallas uniformes de 5×1 , 10×2 y 20×4 elementos $Q1/P0$, $Q1/E5$, $Q1/ES5$ y $Q1/ET5$. En las figuras 3.12 se muestran las distribuciones, en el espesor, de las tensiones radiales, circunferenciales y axiales, respectivamente. La figura 3.13 recoge la distribución de desplazamientos radiales. Los resultados obtenidos con todos los elementos se ajustan adecuadamente a la solución analítica. Asimismo, los resultados de las tres familias de elementos mejorados son idénticos.

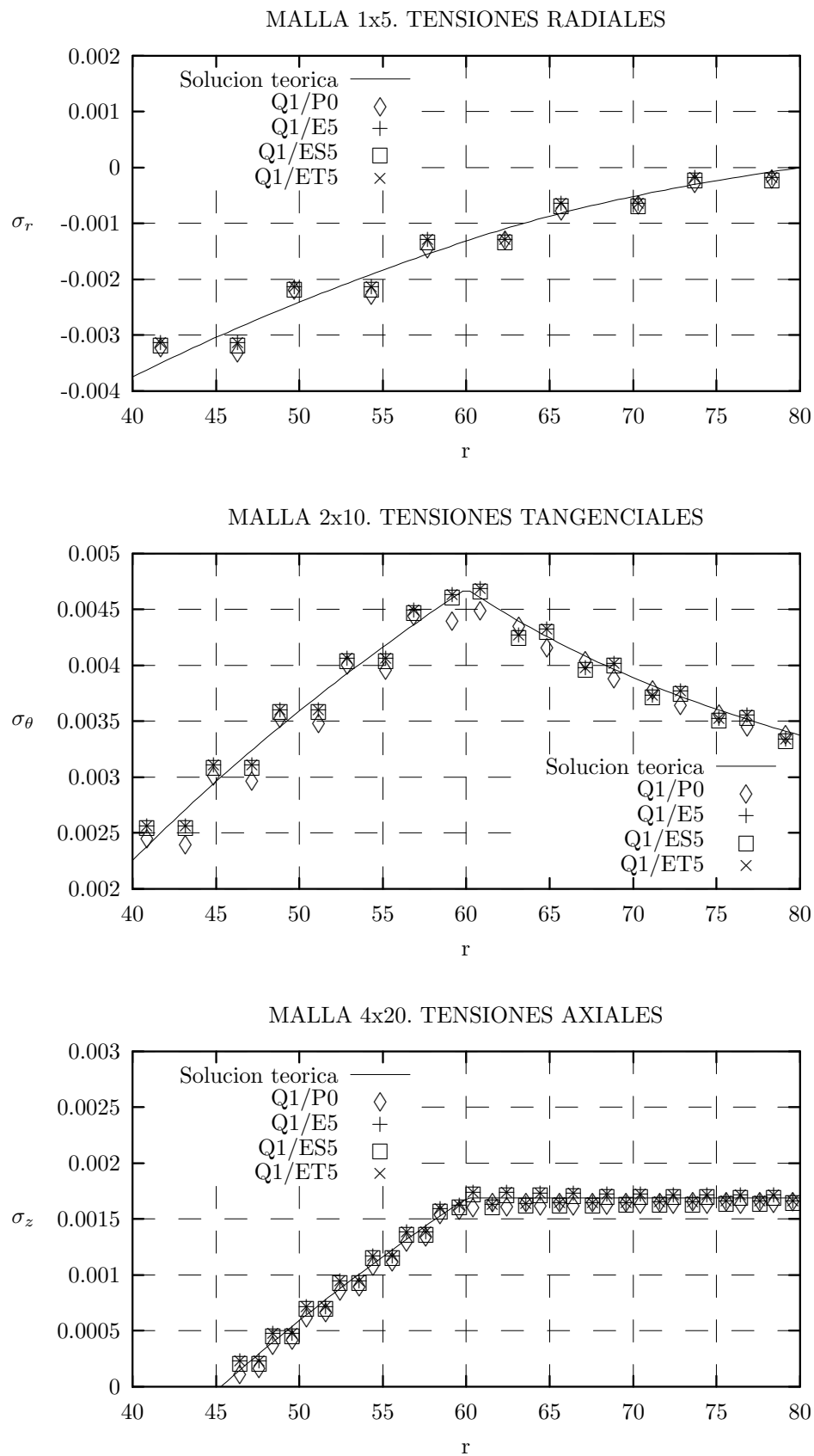


Figura 3.12: *Cilindro con presión interna. Tensiones para distintas mallas*

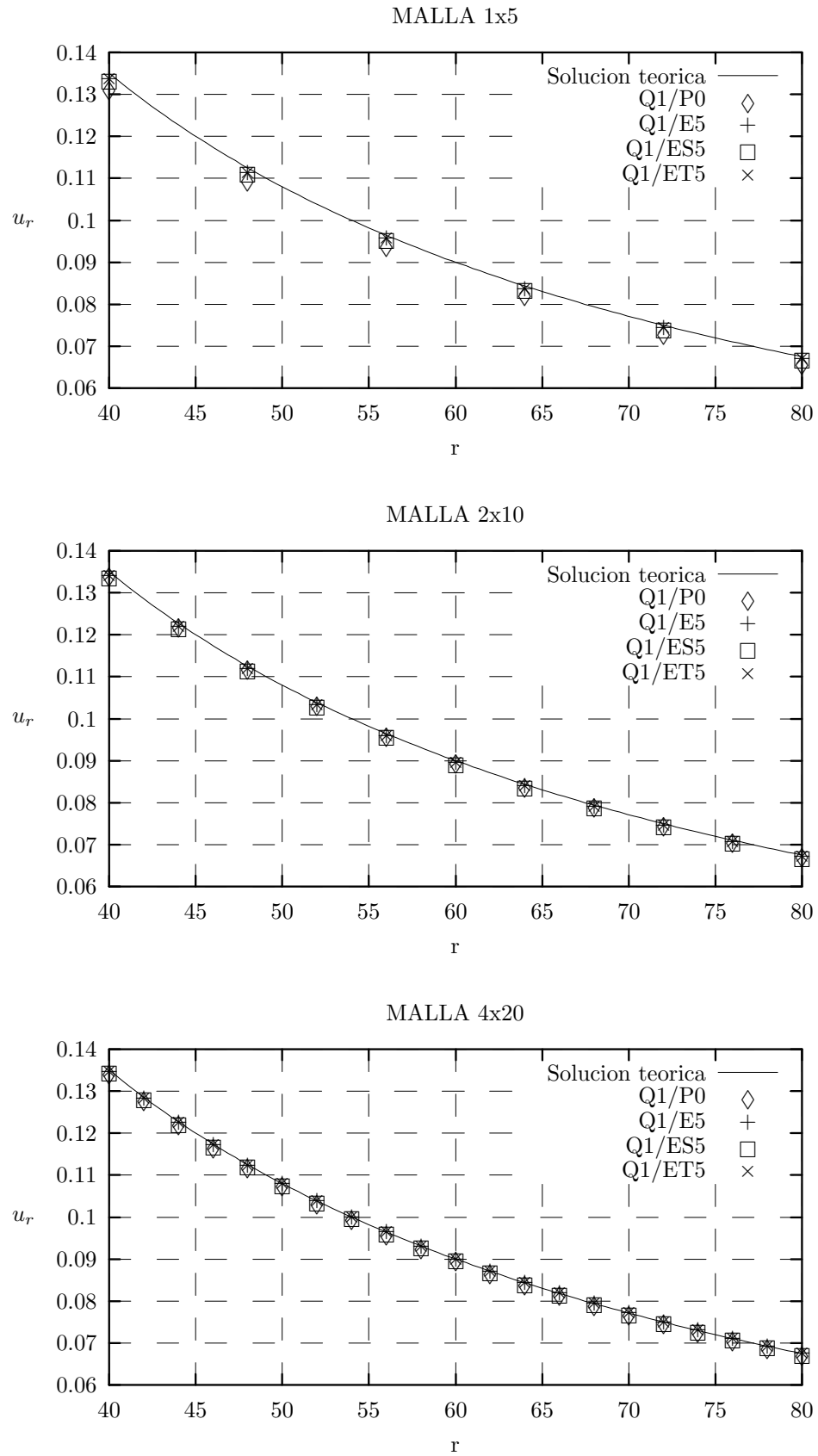


Figura 3.13: *Cilindro con presión interna. Desplazamientos radiales para distintas mallas*

3.9.5. Aplastamiento de un disco cilíndrico

En este ejemplo se modeliza el aplastamiento de un disco cilíndrico (“up-setting”). Propuesto en (Nagtegaal y de Jong, 1981), ha sido utilizado como ejemplo de validación en diversos trabajos (Simó, 1988b; Garino, 1993; Simó, 1988b). Las propiedades elásticas son $E = 1000$ y $\nu = 0,3$. Se considera plasticidad de Von Mises con tensión de fluencia uniaxial $Y = 1$ y endurecimiento constante $H = 3$. El disco tiene radio $R = 6$ y altura $h = 1,5$.

El disco se aplasta suponiendo rozamiento infinito, para lo cual se imponen desplazamientos axiales impidiendo el desplazamiento radial. La malla tiene 20×5 elementos, empleándose elementos $Q1/P0$, $Q1/E5$, $Q1/ES5$ y $Q1/ET5$. Los elementos mejorados se integran con 5 puntos de Gauss. En la figura 3.14 se muestran las deformadas obtenidas con cada elemento y en 3.15 los contornos de deformación plástica efectiva.

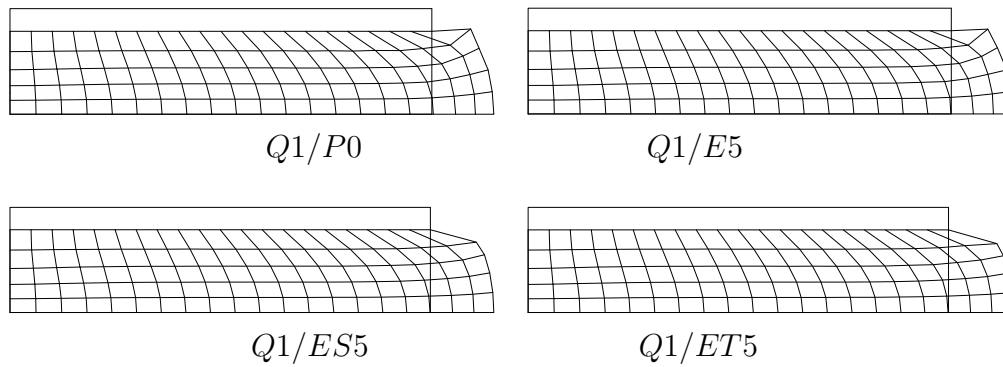


Figura 3.14: *Aplastamiento de un disco. Contorno original y deformadas de la sección axilsimétrica*

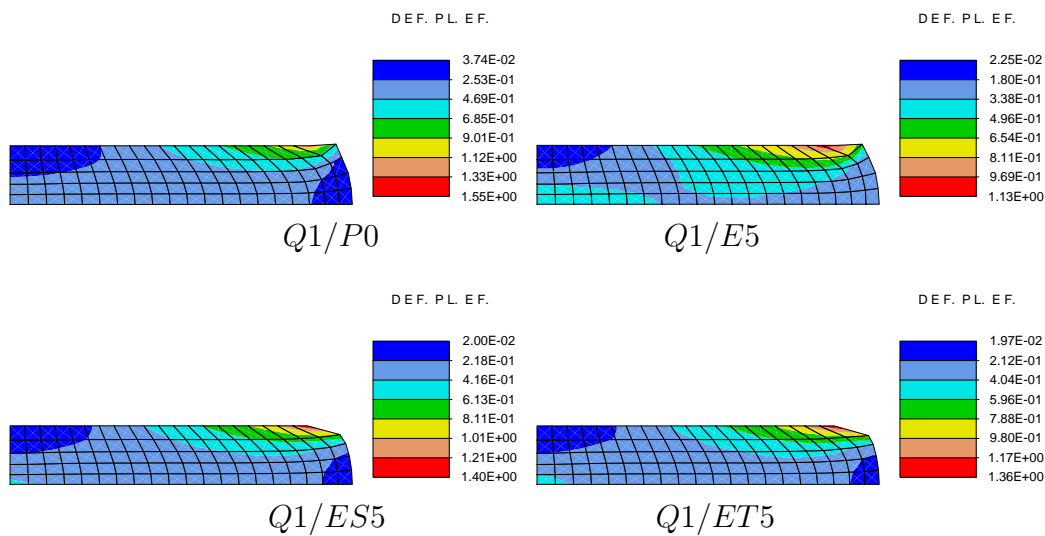


Figura 3.15: *Aplastamiento de un disco. Deformación plástica efectiva*

La curva Fuerza-Desplazamiento se recoge en la figura 3.16. En esta curva cabe destacar el comportamiento similar de los elementos $Q1/ES5$ y $Q1/ET5$, que es más rígido que el de $Q1/P0$ y $Q1/E5$. Por otra parte, estos dos últimos presentan una respuesta muy parecida a la reportada por otros autores (Garino, 1993; Nagtegaal y de Jong, 1981; Ponthot, 1994; Simó, 1988b).

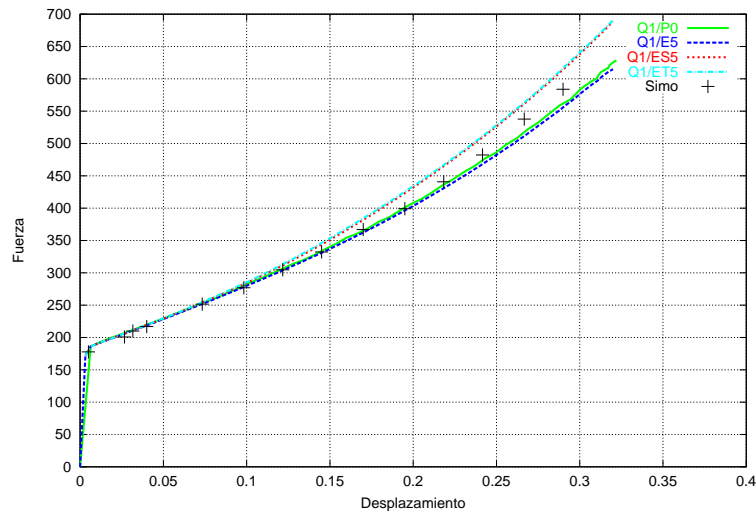


Figura 3.16: *Aplastamiento de un disco. Curva Fuerza-Desplazamiento*

3.10. Aplicación: El ensayo de tracción simple con estricción

Se presenta a continuación, de forma más detallada que en los ejemplos anteriores, la aplicación de los elementos mejorados (capítulo 2) y el modelo constitutivo anteriormente descrito al ensayo de tracción simple de metales dúctiles, con la formación y desarrollo de una estricción o cuello. Anteriormente este problema se ha analizado de manera exhaustiva en (Goi-colea, 1985), obteniendo allí resultados experimentales que posteriormente se contrastaron con los resultados numéricos de un código explícito (Goi-colea, 1990) también desarrollado en dicho trabajo. Los resultados que se reproducen aquí se han obtenido implementando los elementos y el modelo constitutivo en el programa de elementos finitos FEAP (Taylor, 1999).

Se comienza estudiando la interpretación analítica del ensayo, para obtener las leyes de distribución de deformaciones y tensiones en el cuello de la probeta. A continuación se define el modelo numérico con el cual se simula el ensayo. Los resultados obtenidos se comparan con los resultados experimentales disponibles en cuanto a las curvas fuerza-deformación logarítmica y tensión axial-deformación logarítmica. Finalmente se analiza la evolución de la estricción y de la tensión axial media.

3.10.1. Introducción

El análisis numérico de sólidos no lineales sometidos a grandes deformaciones, requiere para su validez que el modelo constitutivo tensión-deformación sea fiable. Un procedimiento relativamente sencillo y económico para caracterizar estas leyes en metales dúctiles es el ensayo de tracción simple. Para caracterizar el comportamiento elástico del material, los procedimientos de ensayo están normalizados: ASTM E8-82 (Methods of tension testing of metallic materials), UNE 7474-1 (Materiales Metálicos. Ensayo de Tracción. Parte 1: Método de Ensayo), etc. No obstante, estos ensayos no proporcionan información sobre la ley constitutiva para grandes deformaciones elastoplásticas. Para tener información del comportamiento del material más allá del régimen lineal, es necesario realizar el ensayo de manera que se llegue a la formación de un cuello o estricción en la zona central de la probeta (Goicolea, 1985).

La distribución de tensiones fue estudiada experimentalmente hace ya tiempo (Bridgman, 1944; Davidenkov y Spiridonova, 1946). Aunque estos resultados experimentales ya fueron reproducidos numéricamente cuando el cálculo de diferencias/elementos finitos no lineales estaba en sus inicios (Wilkins, 1968; Needleman, 1972; Norris et al., 1978), en la actualidad ha recibido la atención de numerosos autores (Garino, 1993; Glaser y Armero, 1995; Simó y Armero, 1993; Ponthot, 1994), situándolo en el contexto de formulaciones modernas de la plasticidad basadas en la descomposición multiplicativa del gradiente de deformaciones. Con este ejemplo de aplicación se pretende verificar si los resultados obtenidos con los elementos con formulación EAS son acordes con los resultados experimentales, y las ventajas que puede ofrecer su uso frente a otros tipos de elementos (\bar{B} , elementos de presión constante, etc.)

3.10.2. Modelo constitutivo

En el ensayo de tracción simple, cuando se ha desarrollado la estricción, se alcanzan grandes deformaciones y grandes rotaciones. Por esta razón, para obtener resultados realistas es necesario emplear elementos con una descripción de la cinemática no lineal, y modelos constitutivos de plasticidad con grandes deformaciones.

En este trabajo se emplea un modelo elastoplástico de Von Mises, con endurecimiento isotrópico definido por una ley de tipo potencial. Este modelo es habitualmente empleado para representar el comportamiento de metales como el aluminio. Otros autores (Simó y Armero, 1993; Ponthot, 1994) han empleando leyes de endurecimiento con saturación para modelizar el comportamiento del acero. En este trabajo se ha optado por modelizar el aluminio puesto que se dispone de los resultados experimentales obtenidos en (Goicolea, 1985). Otros modelos más complejos para plasticidad de metales son aquellos en los que el endurecimiento depende del camino de carga (Ortiz y Popov, 1983). La caracterización de las propiedades mecánicas para estos

modelos requiere de ensayos experimentales muy complejos, razón por la que han sido poco utilizados.

Dado que el aluminio es un metal dúctil y el proceso de carga es suficientemente lento, para los cálculos no intervienen los fenómenos relacionados con la mecánica de la fractura y los efectos dinámicos.

3.10.3. Interpretación analítica

El ensayo de tracción en metales dúctiles pasa por dos etapas desde el punto de vista del estado tensional de la probeta. En la primera, las deformaciones son pequeñas sin que exista una disminución apreciable de la sección transversal, y el estado tensional en la sección central es uniaxial con distribución homogénea de las tensiones. La segunda fase se presenta cuando la tasa de aumento de la tensión debido al endurecimiento del material es menor que la tasa con que disminuye la sección transversal. Entonces se presenta un fenómeno de inestabilidad de tipo geométrico, en el que las deformaciones se concentran en la sección central de la probeta, formándose un cuello o estricción. El flujo plástico queda confinado en esta zona, permaneciendo en estado de carga plástica, y el resto de la probeta queda en descarga elástica. Esta segunda fase se caracteriza porque aparecen tensiones radiales y circunferenciales que dan lugar a un estado tensional triaxial no homogéneo en la zona del cuello.

Para interpretar analíticamente el ensayo de tracción consideraremos una probeta de longitud inicial l_0 y diámetro inicial D_0 . En un instante genérico denominaremos l y D a la longitud y diámetro de dicha probeta, y P a la fuerza aplicada en dirección axial. En lo sucesivo se considera un sistema de coordenadas cilíndricas denotando por u_r y u_z los desplazamientos según el radio y el eje de la probeta, respectivamente.

En la primera fase el estado de tensiones es uniaxial y homogéneo, y la tensión de Cauchy y la deformación logarítmica valen:

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi D^2/4} \quad (3.152)$$

$$\varepsilon_z = \log \frac{l}{l_0} \quad (3.153)$$

Distribución de deformaciones en el cuello

En la segunda fase, en la zona del cuello aparecen tensiones σ_r y σ_θ que dan lugar a un estado triaxial de tensiones, no homogéneo, en el que las ecuaciones (3.152,3.153) no son válidas. En la hipótesis en que las deformaciones radiales son uniformes y existe simetría axial (Bridgman, 1944), los

gradientes de velocidad son:

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r} = \frac{\dot{D}}{D} \quad (3.154)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{1}{D/2} \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\dot{u}_r}{D/2} = \frac{\dot{D}}{D} = \dot{\varepsilon}_r \quad (3.155)$$

De estas dos ecuaciones, se concluye que en el cuello las deformaciones radiales coinciden con las circunferenciales. Este resultado se ha validado experimentalmente (Davidenkov y Spiridonova, 1946) a partir de medidas microscópicas de los granos en la zona de estricción, empleando probetas de aleación de hierro.

Integrando la ecuación (3.154) con la condición de que la deformación radial es nula al comienzo del ensayo ($D = D_0$), se obtiene:

$$\varepsilon_r = \log \frac{D}{D_0} \quad (3.156)$$

Para obtener la distribución de deformaciones axiales se desprecian las deformaciones elásticas frente a las plásticas y se impone la incompresibilidad del flujo plástico:

$$lD^2 = l_0D_0^2 \Rightarrow (l_0 + u_z)D^2 = l_0D_0^2 \Rightarrow \dot{u}_z = -2l \frac{\dot{D}}{D}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión de la componente axial del gradiente de velocidades y sustituyendo el resultado (3.156), se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} = -2 \frac{\partial}{\partial l} \left(l \frac{\dot{D}}{D} \right) = -2 \frac{\dot{D}}{D} = -2\dot{\varepsilon}_r \Rightarrow \varepsilon_z = -2 \log \frac{D}{D_0} \quad (3.157)$$

Por último, la distribución de deformaciones plásticas efectivas en el cuello se obtiene despreciando otra vez las deformaciones elásticas frente a las plásticas y considerando que las deformaciones tangenciales son nulas:

$$\varepsilon^p = \int d\varepsilon^p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p} dt = 2 \int_0^t \frac{\dot{D}}{D} dt = -2 \log \frac{D}{D_0} \quad (3.158)$$

De esta ecuación y de (3.157) se deduce que el valor de la deformación plástica efectiva coincide con el de la deformación logarítmica axial.

Distribución de tensiones en el cuello

Para obtener la distribución de tensiones en el cuello, se plantea la ecuación de la superficie de fluencia de Von Mises para el estado de tensiones axilsimétrico:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.159)$$

Llamando Y a la tensión de fluencia uniaxial, resulta:

$$\sigma_z - \sigma_r = Y \quad (3.160)$$

De acuerdo con (Davidenkov y Spiridonova, 1946), la tensión radial siempre es positiva con lo cual se deduce:

$$\sigma_z > Y \quad (3.161)$$

y por lo tanto, el valor medio de la tensión axial también es mayor que la tensión de fluencia:

$$\bar{\sigma}_z \stackrel{def}{=} \frac{P}{\pi D^2/4} > Y \quad (3.162)$$

La distribución de tensiones en el cuello se obtiene a partir de los resultados experimentales de Bridgman, que relacionan las tensiones a una distancia r del eje de revolución con el radio de curvatura en el cuello de la sección meridional de la probeta, R :

$$\sigma_r = \frac{D^2 - 4r^2}{4RD} Y \quad (3.163)$$

La distribución de tensiones verticales se obtiene sustituyendo (3.163) en (3.160):

$$\sigma_z = Y \left(1 + \frac{D^2 - 4r^2}{4RD} \right) \quad (3.164)$$

El inconveniente de las expresiones (3.163) y (3.164) es la dificultad para medir el radio de curvatura R a lo largo del experimento. Sin embargo, asumiendo que (Bridgman, 1944):

$$\frac{D}{R} = 2\sqrt{\varepsilon_z - 0,1} \quad (\varepsilon_z > 0,1)$$

y empleando (3.157), las distribuciones de tensiones (3.163, 3.164) se pueden expresar de forma más conveniente en términos de la deformación logarítmica axial:

$$\sigma_r = Y \frac{(D^2 - 4r^2)\sqrt{\varepsilon_z - 0,1}}{2D^2} \quad (3.165)$$

$$\sigma_z = Y \left(1 + \frac{(D^2 - 4r^2)\sqrt{\varepsilon_z - 0,1}}{2D^2} \right) \quad (3.166)$$

Finalmente, integrando en la sección del cuello la ecuación (3.166), se obtiene la expresión de la tensión vertical media:

$$\bar{\sigma}_z = Y \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_z - 0,1}} \right) \log \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon_z - 0,1}}{2} \right) \quad (3.167)$$

3.10.4. Definición del modelo numérico

Para reproducir numéricamente el ensayo de tracción, se ha escogido una probeta de aluminio HE30 (BS1474), idéntica a la desarrollada y empleada por (Goicolea, 1985). La probeta tiene una altura de 75 mm. y diámetro 16,2 mm. En los extremos de la probeta se impone un desplazamiento de 10 mm. Dada la simetría existente solo se ha modelizado una cuarta parte. La malla empleada y las condiciones de contorno se muestran en la figura 3.17. Esta malla es la utilizada en (Goicolea et al., 1996). El modelo tiene 412 nodos y 360 elementos, resultando un total de 762 grados de libertad.

Para que se desarrolle la estricción se introduce una pequeña imperfección geométrica (también presente en la probeta real), disminuyendo el radio en la sección central en un 1,8518 % respecto del nominal. La variación del radio entre la sección central y la sección extrema es lineal. Otros autores (Needleman, 1972) plantean el inicio de la estricción calculando el modo de bifurcación mediante un análisis espectral y modificando la matriz de rigidez cuando se alcanza dicho modo.

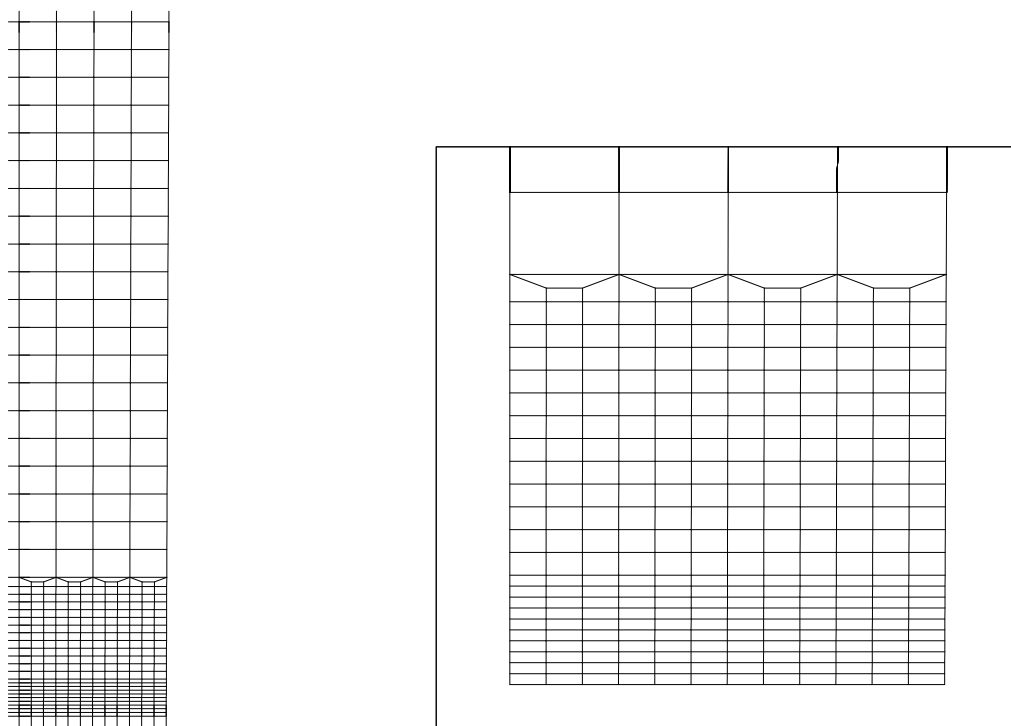


Figura 3.17: *Malla y condiciones de contorno. Detalle de la zona refinada y de la transición*

La formulación del modelo constitutivo J_2 empleado en el cálculo se ha descrito en el capítulo 3. Las constantes elásticas correspondientes al aluminio

del ensayo son:

$$E = 67000 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

La ley de endurecimiento empleada es una ley potencial del tipo:

$$Y(\varepsilon) = A(b + \varepsilon^p)^n \quad (3.168)$$

Los valores de A y n fueron obtenidos por (Goicolea, 1985) como se resume a continuación. A partir de las medidas de la tensión axial media que proporciona la máquina, se obtienen los valores de Y mediante la ecuación (3.167). Los valores de la deformación plástica efectiva ε^p se obtienen midiendo con un calibre el diámetro del cuello de la probeta y sustituyendo en (3.158). Los puntos (ε^p, Y) se llevan a una escala doblemente logarítmica, y mediante un cálculo de regresión lineal se obtienen:

$$A = 181,7 \text{ GPa}$$

$$n = 0,159$$

El parámetro b se obtiene imponiendo en la ecuación (3.168) que el límite elástico inicial sea $Y_0 = 50 \text{ MPa}$, resultando:

$$b = 2,989 \cdot 10^{-4}$$

3.10.5. Resultados

En los cálculos de elementos finitos, se han empleado el elemento mixto de presión constante (Q1/P0) y los elementos de deformaciones supuestas Q1/E5, Q1/ES5 y Q1/ET5, integrados con cuadraturas de 5 y 9 puntos de Gauss.

En primer lugar se comparan los resultados obtenidos en este trabajo, con los resultados experimentales disponibles.

A continuación se analiza la evolución a lo largo del ensayo de las siguientes variables:

1. Estricción
2. Fuerza axial aplicada
3. Tensión axial de Cauchy en el cuello

Estos resultados permiten extraer conclusiones relativas a la influencia de la cuadratura empleada, y al comportamiento de las distintas familias de elementos consideradas.

Finalmente se investiga la distribución de las tensiones en la zona de la estricción, comparando los valores calculados en los puntos de Gauss con las distribuciones dadas por las expresiones (3.165) y (3.166).

Comparación con los resultados experimentales

Para caracterizar la ley constitutiva elastoplástica se llevaron a cabo cinco ensayos de tracción (Goicolea, 1985) en probetas de aluminio HE30, cuya composición era: 95.2 % Al, 0.1 % Cu, 0.4-1 % Mg, 0.6-1.3 % Si, 0.6 % Fe, 0.4-1.0 % Mn, 0.1 % Zn, 0.5 % Cr y 0.2 % de otros metales. El aluminio, fabricado mediante extrusión y posteriormente recocido ³, fue mecanizado para obtener las probetas que, después de ensayadas, se muestran en la figura 3.18.



Figura 3.18: *Estado de las probetas de aluminio después del ensayo de tracción*

El ensayo se llevó a cabo con desplazamientos impuestos, a una velocidad lo suficientemente baja (0,5 – 1,0 mm/min) como para considerarlo estático. A lo largo del proceso de estiramiento se tomaron medidas del ancho del cuello en la sección central, para obtener los valores de la deformación logarítmica mediante la expresión (3.156). Con este valor y los datos extraídos de la prensa a lo largo del ensayo, se obtuvieron los puntos de las curvas “Fuerza-Deformación Logarítmica ($P - \varepsilon_z$)” y “Tensión vertical media-Deformación Logarítmica ($P/A - \varepsilon_z$)”, que se muestran en las figuras 3.19 y 3.20, respectivamente. En estas figuras se superponen los puntos que resultaron del ensayo de las cinco probetas sometidas al proceso de recocido (que en los títulos se denominan CT1, CT2, CT4, CT5 y CT6), con los obtenidos numéricamente

en este trabajo.

En ambas figuras puede observarse que los resultados obtenidos numéricamente reproducen de manera adecuada los resultados experimentales. Aproximadamente a partir de $\varepsilon_z \approx 0,2$ el efecto geométrico de reducción de la sección (debido a la estricción) prima sobre el endurecimiento del material, y la carga total disminuye a pesar de que el material no tiene reblandecimiento.

³Se ensayó una sexta probeta sin someterla al proceso de recocido

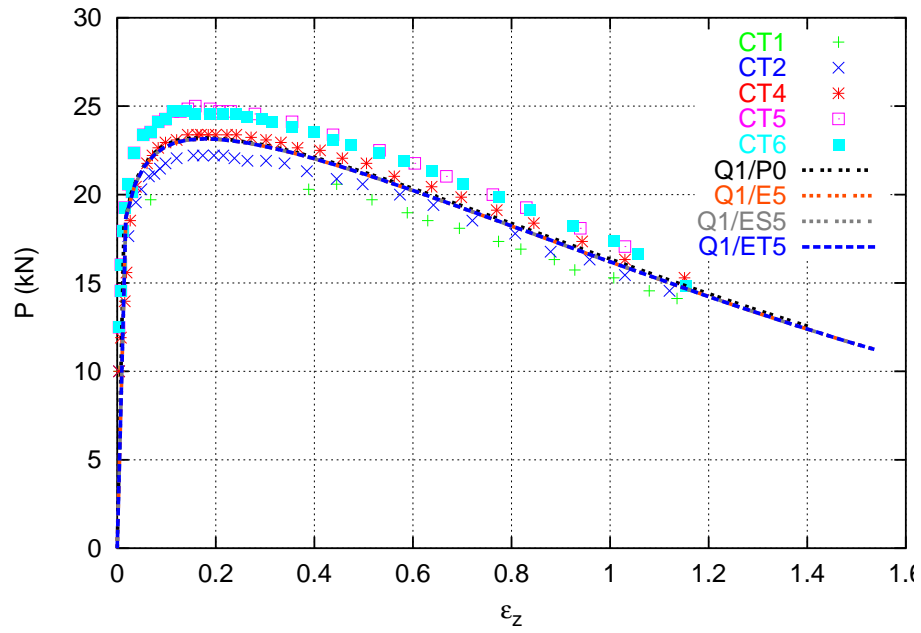


Figura 3.19: Comparación de resultados numéricos y experimentales. Curva Fuerza-deformación ($P - \varepsilon_z$)

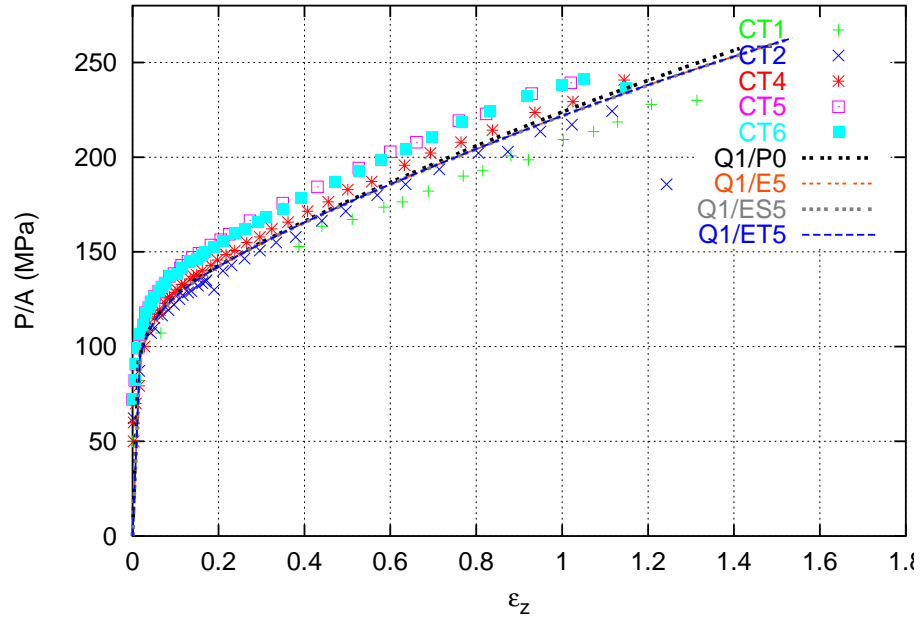


Figura 3.20: Comparación de resultados numéricos y experimentales. Curva tensión-deformación ($\bar{\sigma}_z - \varepsilon_z$)

Evolución de la estricción



Todos los elementos utilizados capturan adecuadamente la formación del cuello en el ensayo de tracción. En la figura 3.21 se muestra la deformada global, que es similar en todos los casos analizados.

Para conocer la evolución de la estricción, se han dibujado las curvas de estricción D/D_0 frente a alargamiento $\Delta l/l_0$ a lo largo del ensayo.

La figura 3.22 compara los resultados obtenidos con los elementos mejorados, integrados con cinco puntos de Gauss, con los del elemento de presión constante Q1/P0. Como se puede observar, la estricción alcanzada es ligeramente mayor si se utilizan elementos de deformaciones supuestas.

En el cuadro 3.5 se recoge un resumen de los valores de la estricción obtenidos al final del cálculo.

Figura 3.21: *Malla deformada*

Evolución de la tensión axial media

A continuación se discuten los resultados obtenidos referentes a la evolución de la tensión axial media $\bar{\sigma}_z$ en el cuello, a lo largo del ensayo. La tensión $\bar{\sigma}_z$ se dibuja frente a la deformación logarítmica axial ε_z , con objeto de obtener una curva que represente de manera global el comportamiento elastoplástico uniaxial del aluminio. Para ello, los valores de $\bar{\sigma}_z$ y ε_z se obtienen introduciendo en las expresiones (3.162) y (3.157), respectivamente, los valores de P y D calculados en el análisis de elementos finitos.

En la figura 3.23 se comparan los resultados obtenidos con los elementos

	D/D_0
Q1/P0	0,493
Q1/E5 (5 P.G.)	0,464
Q1/E5 (9 P.G.)	0,471
Q1/ES5 (5 P.G.)	0,464
Q1/ES5 (9 P.G.)	0,475
Q1/ET5 (5 P.G.)	0,464
Q1/ET5 (9 P.G.)	0,467

Cuadro 3.5: *Comparación de resultados numéricos de la estricción, en el cuello, al final del análisis*

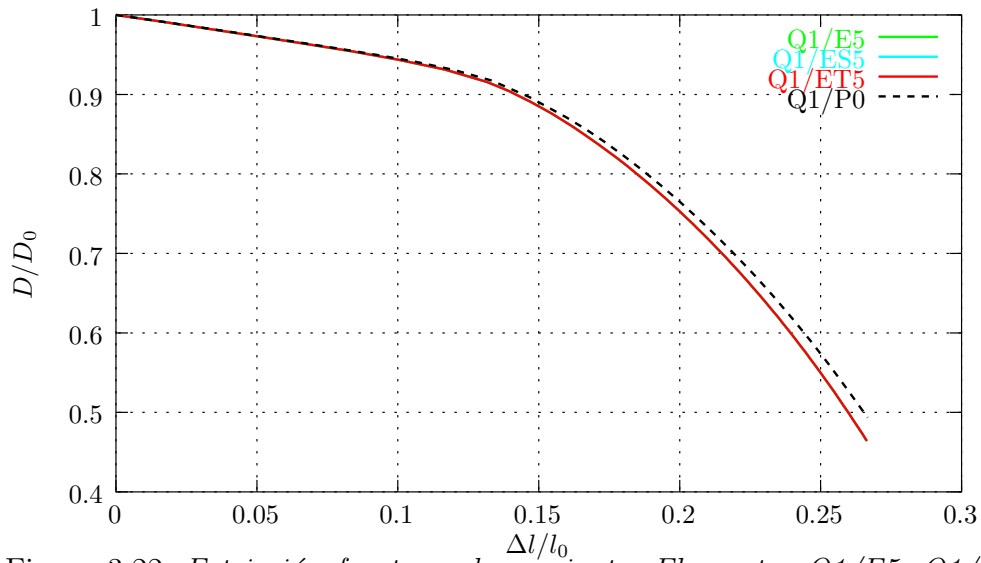


Figura 3.22: Estricción frente a alargamiento. Elementos Q1/E5, Q1/ES5, Q1/ET5 y Q1/P0

de deformaciones supuestas y el elemento mixto Q1/P0. Aunque desde el punto de vista práctico son los mismos, el elemento Q1/P0 tiene un comportamiento ligeramente más rígido: la tensión calculada es ligeramente mayor en comparación con la de los elementos de deformaciones supuestas, y la deformación logarítmica al final del ensayo es sensiblemente menor.

Finalmente, en el cuadro 3.6, se muestran los valores de la deformación y de la tensión alcanzados al final del cálculo.

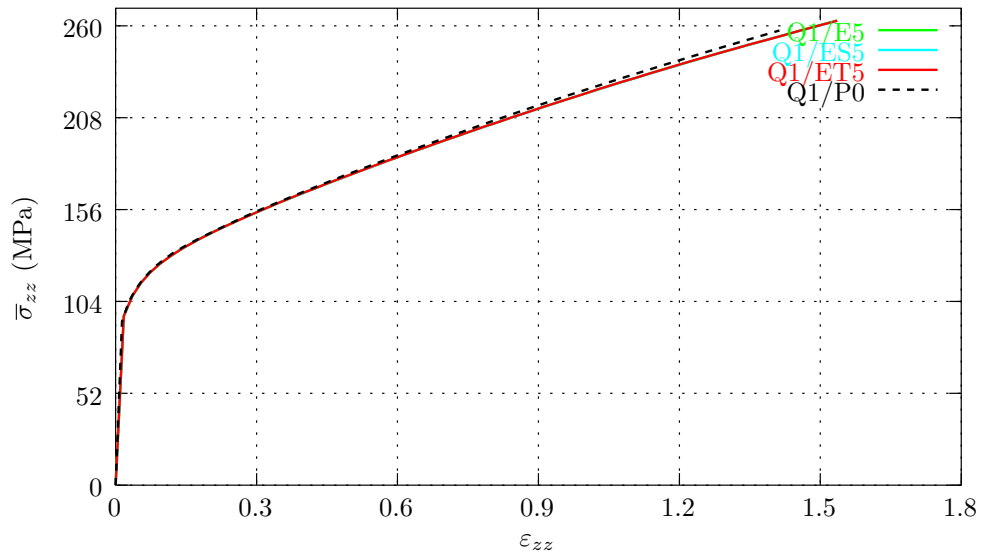


Figura 3.23: Tensión axial media frente a deformación logarítmica axial. Elementos Q1/E5, Q1/ES5, Q1/ET5 y Q1/P0

	ε_z	$\bar{\sigma}_z$ (MPa)
Q1/P0	1,413	257,4
Q1/E5 (5 P.G.)	1,536	263,0
Q1/E5 (9 P.G.)	1,508	261,1
Q1/ES5 (5 P.G.)	1,535	262,8
Q1/ES5 (9 P.G.)	1,490	259,8
Q1/ET5 (5 P.G.)	1,536	262,9
Q1/ET5 (9 P.G.)	1,522	262,0

Cuadro 3.6: *Deformación y tensión axial al final del análisis*

Evolución de la carga aplicada

A continuación se analiza la evolución de la carga vertical aplicada frente a la deformación logarítmica. El valor de dicha carga se obtiene sumando las reacciones verticales de cada uno de los nodos que tienen el desplazamiento impuesto.

La figura 3.24 compara la respuesta de los elementos mejorados, integrados con cinco puntos de Gauss, y del elemento mixto de presión constante. El cuadro 3.7 muestra los valores máximos de la carga y la deformación logarítmica axial correspondiente, y el valor de la deformación al final del cálculo con la carga correspondiente. Los valores de este cuadro permiten concluir:

- El elemento Q1/P0 es ligeramente más rígido que los elementos con deformaciones supuestas
- El comportamiento de los distintos elementos con deformaciones supuestas empleados es esencialmente el mismo. En la rama pre-pico el comportamiento es idéntico, y en la rama post-pico se observa un ligero aumento de la rigidez si se utiliza la cuadratura de 3×3 puntos de Gauss.

	P_{max} (N)	$\varepsilon_z(P_{max})$	$\varepsilon_{z,max}$	P_{min} (N)
Q1/P0	23,21	0,172	1,413	12,44
Q1/E5 (5 P.G.)	23,15	0,176	1,536	11,25
Q1/E5 (9 P.G.)	23,15	0,176	1,508	11,48
Q1/ES5 (5 P.G.)	23,15	0,176	1,535	11,24
Q1/ES5 (9 P.G.)	23,16	0,179	1,490	11,62
Q1/ET5 (5 P.G.)	23,15	0,176	1,536	11,24
Q1/ET5 (9 P.G.)	23,15	0,176	1,522	11,35

Cuadro 3.7: *Comparación de resultados numéricos de la carga aplicada y de la deformación logarítmica axial en el cuello*

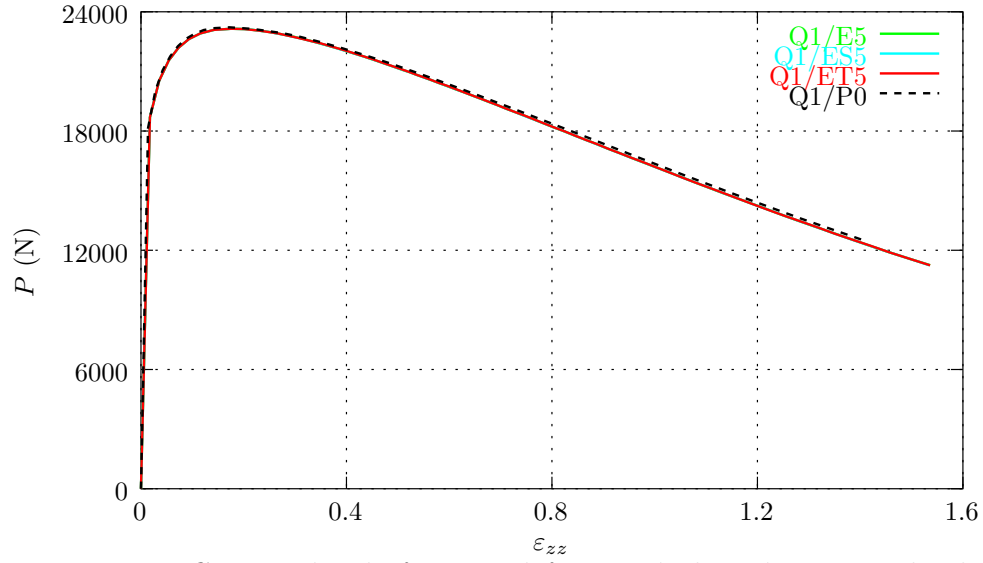


Figura 3.24: Carga aplicada frente a deformación logarítmica axial. Elementos Q1/E5, Q1/ES5, Q1/ET5 y Q1/P0

3.11. Conclusiones

En este capítulo se ha tratado del modelo constitutivo que se empleará posteriormente en las aplicaciones del capítulo 5, con énfasis en su definición, implementación computacional y validación. El modelo se define en la configuración intermedia y posteriormente las ecuaciones se integran en la configuración deformada. De esta forma surge un esquema numérico de actualización multiplicativa del tensor de Finger a partir de la hipótesis de descomposición multiplicativa.

Con este trabajo se ha iniciado una de las líneas de investigación propuestas en (Garino, 1993), realizando las siguientes aportaciones:

1. Implementación del modelo en el contexto de los elementos de deformaciones supuestas, manteniendo la sencillez en el algoritmo de integración de las ecuaciones de la plasticidad.
2. Utilización de un modelo neo-hookeano en la definición de la energía libre elástica. De este modo se pueden abordar problemas con grandes deformaciones elásticas, además de grandes rotaciones, en el caso particular en que no exista flujo plástico. No obstante, es necesario hacer dos matizaciones:
 - a) Dado que el modelo se formula para representar el comportamiento de metales en régimen plástico, las deformaciones elásticas no son relevantes.
 - b) El tensor de deformaciones de Almansi no es el más adecuado para cuantificar las grandes deformaciones elásticas. Este hecho se puede comprobar en el caso uniaxial en el cual la deformación de Almansi tiene una asíntota en $e = 1/2$.

Capítulo 4

Estimación de error

4.1. Resumen y Objetivos

Al resolver un problema con los elementos finitos con formulación en deformaciones supuestas ([Simó y Rifai, 1990](#); [Simó y Armero, 1993](#)), descritos en el capítulo 2, los grados de libertad internos asociados a las deformaciones mejoradas se activan para los modos de deformación del elemento que no son uniformes¹ El objeto de este capítulo es investigar la posible relación entre los modos mejorados y la calidad de la solución obtenida, en problemas elásticos lineales, hiperelásticos no lineales y con plasticidad de Von Mises. La idea parte de otros trabajos ([Beltrán, 1990](#); [Beltrán y Alarcón, 1992](#)) en los que se propone como estimador de error para elasticidad lineal, la diferencia entre las energías obtenidas con elementos finitos formulados mediante diversos funcionales multcampo parametrizados ([Felippa, 1989a](#)). El presente trabajo también se realiza en el contexto de la estimación de error, cuantificando la contribución de los modos de deformación mejorados mediante la norma de la energía. La metodología que se emplea está basada en la recientemente propuesta para la estimación de error en ([Radovitzky y Ortiz, 1998](#)), y en la integración variacional de las ecuaciones de la plasticidad ([Ortiz y Stainier, 1998](#)).

El capítulo consta de seis apartados, de los cuales este es el primero. El segundo comienza con una introducción a la problemática de la estimación de error, describiéndose los estimadores e indicadores de error, para problemas lineales y no lineales, más relevantes en el estado de la técnica. El tercer apartado estudia la relación entre los modos mejorados y la calidad de la solución en problemas de elasticidad lineal. El cuarto se dedica a la elasticidad no lineal con grandes deformaciones, empleando modelos hiperelásticos. El quinto apartado aborda los problemas con plasticidad de Von Mises con endurecimiento lineal y no lineal. Finalmente, en el último apartado se exponen las conclusiones del capítulo.

¹En general los modos de deformación no uniforme son aquellos que, de acuerdo con la prueba de la parcela, no son capturados de manera exacta por el elemento

En el apéndice [C](#) se exponen brevemente algunos conceptos básicos de Análisis Funcional que se consideran de utilidad para este capítulo. Lo expuesto en este apéndice se pueden consultar con más detalle en ([Lebedev et al., 1996](#); [Oden, 1972](#); [Ciarlet, 1978](#); [Marsden y Hughes, 1983](#)).

4.2. Introducción

4.2.1. Antecedentes

Actualmente el Método de los Elementos Finitos es una herramienta de cálculo habitual para el ingeniero dentro del ciclo de cálculo, diseño y comprobación de estructuras. No basta con conocer la solución del problema que se aborda, sino que es necesario tener información sobre la calidad de los resultados obtenidos. El proceso que generalmente se sigue en un cálculo computacional tiene varios pasos ([Babuška, 1990](#)):

1. Definición del problema físico
2. Modelo matemático básico que explique de forma realista el problema físico
3. Obtención de un modelo matemático simplificado a partir de anterior, que en general se expresará mediante un conjunto de ecuaciones algebraicas, si el problema no depende del tiempo².
4. Solución del modelo matemático simplificado
5. Conclusiones y decisiones de tipo ingenieril

En cada uno de los pasos anteriores se introducen errores evitables e inevitables. La mayor parte de los errores inevitables se cometen al crear el modelo matemático simplificado. Un análisis sistemático de los mismos se realiza en ([Shephard et al., 1990](#)), pudiéndose destacar los siguientes:

1. Aproximación de la geometría
2. Reducción de la dimensión espacial del problema (por ejemplo, pasando de 3 a 2 dimensiones)
3. Caracterización del modelo de comportamiento del material
4. Condiciones de contorno y/o condiciones iniciales
5. Discretización

²En un problema dinámico se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

Los estimadores e indicadores de error cuantifican en la medida de lo posible, de forma absoluta o relativa respectivamente, el error de discretización. Dado que la solución del modelo matemático básico (que en lo sucesivo llamaremos *solución exacta*) es desconocida, el *estimador de error* cuantifica la diferencia entre dicha solución exacta y la calculada para el modelo simplificado, considerando como causa única del error la correspondiente a la discretización. Un indicador de error es cualquier medida que proporcione la información necesaria para disminuir el error de discretización, modificando esta. La modificación puede consistir en: aumentar el número de elementos (refinamiento h), modificar el grado de las funciones de interpolación (refinamiento p), una combinación de estas dos (refinamiento $h - p$), e incluso simplemente recolocar los elementos manteniendo el número de los mismos. Existen dos familias de estimadores de error: los estimadores “a priori” y los estimadores “a posteriori”. Los estimadores “a priori” establecen las tasas de convergencia que se obtendrán en sucesivos análisis en los que las mallas se van refinando de manera uniforme (Zienkiewicz y Morgan, 1983). Una exposición detallada sobre estimadores “a priori” se realiza en (Szabó, 1990). Los estimadores “a posteriori” se obtienen a partir de una solución aproximada previamente calculada, y proporcionan dos tipos de información: el error global de discretización cometido y la distribución local de errores en la malla de elementos finitos. Para ello se define la función error como la diferencia entre el valor exacto del campo incógnita del problema \mathbf{u} y el valor calculado con elementos finitos \mathbf{u}_h :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x})$$

Observación 4.2.1 *En los problemas de contorno que se abordarán en este capítulo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ es el campo de desplazamientos, que está definido en cada punto \mathbf{x} del sólido*

Para cuantificar el valor de la función $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ se emplea alguna norma, definida sobre el dominio del sólido, que proporciona la medida del error global:

$$E = \|\mathbf{E}\|_{\Omega}$$

Localizando esta expresión sobre cada elemento se obtiene el error local E^e :

$$E^e = \|\mathbf{E}\|_{\Omega^e}$$

El interés de los métodos de estimación de error “a posteriori” es su aplicación directa e indispensable para las técnicas de remallaje adaptativo. Su desarrollo comienza a finales de los años setenta en diversos trabajos pioneros (Babuška y Rheinboldt, 1978b; Babuška et al., 1994). Desde estos inicios hasta la época actual se han propuesto diversos estimadores en el campo del análisis lineal, cuya eficacia se ha probado en un amplio rango de problemas. Sin embargo, en el ámbito de los problemas no lineales los principales

desarrollos no se han realizado hasta esta década, quedando aún problemas abiertos. Además existen limitaciones inherentes a la naturaleza de este tipo de problemas: no unicidad de la solución debido a que esta depende del camino de carga, desarrollo de bandas de localización de deformaciones que dejan mal planteado, desde el punto de vista matemático, el problema de contorno, etc.

4.2.2. Estimadores de error para análisis lineal

En este apartado se hace un resumen de las técnicas más relevantes de estimación de error, en el contexto de la mecánica lineal de sólidos. Un análisis detallado de los estimadores más importantes en el ámbito del análisis lineal se puede encontrar en (Babuška et al., 1986; Beltrán, 1990) y en las referencias incluidas en dicho trabajo.

Las técnicas para la estimación del error de discretización en cálculos lineales de elementos finitos se pueden clasificar en cinco grandes grupos (Braess, 1997):

1. Estimadores residuales
2. Estimadores basados en problemas locales de tipo Neumann
3. Estimadores basados en problemas locales de tipo Dirichlet
4. Estimadores basados en técnicas de suavizado
5. Estimadores jerárquicos

A continuación se hace una descripción breve de estas metodologías de estimación de error. Aunque no se puede englobar en los grupos anteriores, se comienza describiendo la *extrapolación de Richardson* por razones históricas, ya que fue introducida en 1910 en el contexto de las diferencias finitas. Posteriormente, diversos autores le han prestado una atención importante (Szabó y Babuška, 1991) implementándola en el código comercial PROBE (Szabó, 1985).

Extrapolación de Richardson

Tiene por objeto predecir el error respecto de la solución exacta de un problema, conociendo dos soluciones obtenidas con mallas de parámetros h_1 y h_2 , respectivamente. Para aplicar la extrapolación es necesario conocer el orden de convergencia de la solución, que supondremos que es $o(h^n)$.

Definiendo el error de discretización como la diferencia de las normas energéticas correspondientes a la solución exacta y a la solución aproximada (Szabó y Babuška, 1991):

$$E = \Pi(\mathbf{u}_h) - \Pi(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}_h\|_E - \|\mathbf{u}\|_E$$

donde $\|\cdot\|_E$ es la norma de la energía (ver apéndice C), uno de los posibles procedimientos de extrapolación es el que se describe a continuación (Zienkiewicz y Morgan, 1983). Supongamos que las soluciones obtenidas con las mallas de parámetros h_1 y h_2 son \mathbf{u}_{h_1} y \mathbf{u}_{h_2} , respectivamente. Si \mathbf{u} es la solución exacta del problema, dado que la convergencia es monótona y de tasa conocida, se cumplirá:

$$\frac{\|\mathbf{u}\|_E - \|\mathbf{u}_{h_1}\|_E}{\|\mathbf{u}\|_E - \|\mathbf{u}_{h_2}\|_E} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^n \quad (4.1)$$

obteniéndose de esta ecuación el valor de $\|\mathbf{u}\|_E$. La ecuación (4.1) ha sido mejorada (Szabó y Babuška, 1991), considerando que la tasa de convergencia va multiplicada por una constante C que es incógnita. Al introducir esta constante es necesario obtener la solución con una tercera malla de parámetro h_3 , para tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

A pesar de que con esta técnica se han obtenido estimadores de error muy precisos, tiene el inconveniente de que no se puede asegurar que en general la tasa de convergencia n sea constante para las mallas consideradas (ni tampoco la constante C).

Estimadores residuales

Como se describirá en el apartado 4.3.2, el problema de contorno que se pretende resolver para obtener el campo de desplazamientos \mathbf{u} se puede plantear mediante un operador diferencial \mathbf{A} , tal que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

Este operador se aplica al dominio Ω y al contorno $\partial\Omega$, pudiéndose descomponer en:

$$\mathbf{A}_\Omega(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (4.3)$$

$$\mathbf{A}_{\partial\Omega}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial\Omega \quad (4.4)$$

Si en la ecuación (4.2) se sustituye \mathbf{u} por el campo de desplazamientos calculado por elementos finitos para el elemento e : \mathbf{u}_h^e , se obtiene un residuo \mathbf{R}^e :

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_h^e) = \mathbf{R}^e \quad \text{en } \Omega^e \quad (4.5)$$

que de acuerdo con (4.3) y (4.4) tiene dos componentes \mathbf{R}_Ω^e y $\mathbf{R}_{\partial\Omega}^e$ asociadas respectivamente al equilibrio en el dominio del elemento Ω^e y al equilibrio en el contorno $\partial\Omega^e$ ($\mathbf{R}_{\partial\Omega}^e$ es discontinuo en los contornos del elemento e y sus adyacentes).

Los estimadores de error residuales se basan en cuantificar el error de discretización a partir de los valores de \mathbf{R}_Ω^e y $\mathbf{R}_{\partial\Omega}^e$. Este tipo de estimadores de error fueron propuestos en (Babuška y Rheinboldt, 1978a)

Estimadores basados en problemas locales de Neumann

Una vez conocidos los residuos elementales \mathbf{R}_Ω^e y $\mathbf{R}_{\partial\Omega}^e$ de la solución de elementos finitos, para cada uno de los elementos de la malla se vuelve a resolver el problema de contorno de Neumann, definido por las ecuaciones:

$$\mathbf{A}_\Omega(\mathbf{z}^e) = \mathbf{R}_\Omega^e \quad \text{en } \Omega^e \quad (4.6)$$

$$\mathbf{A}_{\partial\Omega}(\mathbf{z}^e) = \mathbf{R}_{\partial\Omega}^e \quad \text{en } \partial\Omega^e \quad (4.7)$$

empleando funciones de interpolación de mayor grado que las anteriormente utilizadas para obtener \mathbf{u}_h . Una vez resuelto este problema, el error de discretización se expresa en términos de $\|\mathbf{z}^e\|$. Este estimador se ha propuesto en (Bank y Weiser, 1985).

Estimadores basados en problemas locales de Dirichlet

Para cada elemento e cuyo dominio es Ω^e , se definen los conjuntos:

$$\omega^e = \bigcup \left\{ \Omega'^e \subset \Omega; \quad \Omega'^e \text{ y } \Omega^e \text{ tienen un punto común ó } \Omega'^e = \Omega^e \right\}$$

$$\partial\omega^e = \{ \text{contorno de } \omega^e \}$$

En la figura 4.1 se muestra una malla de elementos cuadriláteros, en la que se señalan los conjuntos ω^e y $\partial\omega^e$ correspondientes al elemento e .

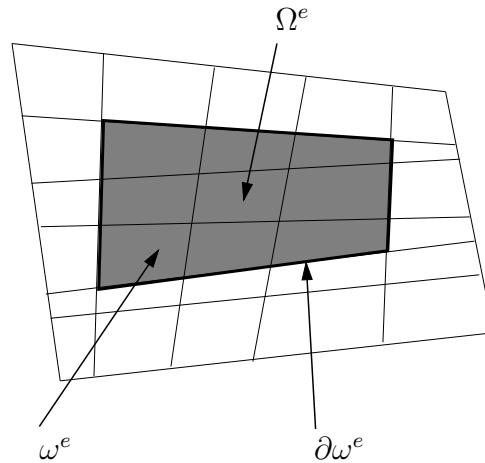


Figura 4.1: Conjuntos ω^e y $\partial\omega^e$ en una malla de elementos cuadriláteros

Observación 4.2.2 La definición dada para el conjunto ω^e considera que la discretización se efectúa con elementos de cuatro lados. Si se emplean triángulos, los elementos que forman dicho conjunto son los que tienen un lado (y no un punto) en común con Ω^e . Desde un punto de vista intuitivo, el conjunto ω^e contiene al elemento Ω^e y todos los que lo “envuelven”.

Para estimar el error, se resuelve el problema de Dirichlet:

$$\mathbf{A}_\Omega(\mathbf{z}^e) = \mathbf{0} \quad \text{en } \omega^e \quad (4.8)$$

$$\mathbf{z}^e = \mathbf{u}_h \quad \text{en } \partial\omega^e \quad (4.9)$$

empleando también en este caso funciones de interpolación de mayor grado que las utilizadas para el cálculo de \mathbf{u}_h . Una vez que se ha calculado \mathbf{z}^e , el estimador de error local se obtiene como:

$$E^e = \|\mathbf{z}^e - \mathbf{u}_h^e\| \quad (4.10)$$

Este estimador de error está propuesto en (Babuška y Rheinboldt, 1978b).

Estimadores basados en técnicas de suavizado

Estos estimadores de error evalúan la diferencia entre el gradiente del campo de desplazamientos (tensiones, en el caso de la mecánica de sólidos) obtenido en el cálculo de elementos finitos $\boldsymbol{\sigma}_h$, y una proyección suave $\boldsymbol{\sigma}^*$ obtenida a partir de $\boldsymbol{\sigma}_h$, que se considera más precisa. El estimador más conocido de esta familia es el denominado Z^2 (Zienkiewicz y Zhu, 1987).

Existen diversas técnicas de proyección de $\boldsymbol{\sigma}_h$ (Zienkiewicz y Taylor, 1989). Un procedimiento muy sencillo y eficaz consiste en obtener un valor promedio de los valores de la tensión en los nodos $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i$ ($i = 1, n_{\text{nod}}$), a partir de los calculados en los puntos de Gauss. La proyección suave del campo de tensiones así obtenida es:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \sum_{i=1}^{n_{\text{nod}}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_i N_i \quad (4.11)$$

El error de discretización expresado en términos de los campos de tensiones es:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{error}} = \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h \quad (4.12)$$

y el estimador de error se obtiene con la norma energética de $\boldsymbol{\sigma}^{\text{error}}$:

$$\|E\|^2 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{\text{error}} \cdot \mathbf{C}^e \boldsymbol{\sigma}^{\text{error}} d\Omega \quad (4.13)$$

Esta técnica de proyección, aunque no es variacionalmente consistente, tiene la ventaja de ser eficiente al no ser necesario trabajar con matrices de “masa” globales, y se ha implementado en el programa PRZ (Goicolea, 1988).

El estimador de error Z^2 tiene las ventajas de ser intuitivo desde el punto de vista ingenieril y sencillo de implementar. Su inconveniente es que supone más preciso el campo de tensiones suavizado que el campo de tensiones discontinuo, sin que esta hipótesis tenga que ser necesariamente cierta. Por ejemplo en el ensayo de corte de una probeta rectangular formada por dos materiales separados por una interfase, el campo de tensiones tangenciales exacto es discontinuo, produciéndose el salto en la interfase de los dos materiales. Esta solución es capturada exactamente en un cálculo de elementos finitos, y sin embargo con el estimador Z^2 se obtiene un error no nulo.

Estimadores jerárquicos

Sea $\mathbf{u} \in V$ la solución exacta del problema de contorno que se resuelve por elementos finitos y $\mathbf{u}_h \in V_h$ la solución aproximada, contenida en subespacio de dimensión finita $V_h \subset V$. Si se supone $\dim V_h = p$, la solución \mathbf{u}_h se puede expresar:

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^p \mathbf{d}_i N_i(\mathbf{x}) \quad (4.14)$$

Teniendo en cuenta que la solución exacta $\mathbf{u} \in V$ y $\dim V = \infty$, el error de discretización que se comete se puede interpretar como:

$$\mathbf{E} = \mathbf{u} - \sum_{i=1}^p \mathbf{d}_i N_i = \sum_{i=p+1}^{\infty} \mathbf{d}_i N_i \quad (4.15)$$

Los estimadores de error jerarquizados consisten en ir aumentando la dimensión del subespacio V_h , introduciendo funciones N_i ($i = p+1, p+2, \dots$), de manera que sustituyendo cada una de ellas en (4.15) se cuantifica la mejora en la calidad de la solución que proporciona. Las funciones N_i ($i = p+1, p+2 \dots q$) se obtienen a partir de la definición previa de una sucesión (de dimensión finita q) de funciones jerarquizadas. Los procedimientos para eliminar las incógnitas \mathbf{d}_i ($i = p+1, p+2 \dots q$) y obtener la cota del error son laboriosos y se salen del ámbito de esta introducción. Se pueden encontrar detallados en (Beltrán, 1990; Deuffhard et al., 1989).

4.2.3. Estimadores de error para análisis no lineal

La estimación de error en problemas no lineales es un tema que ha centrado la atención de importantes investigadores en la última década, y que sin embargo aún tiene cuestiones abiertas. La problemática de los análisis no lineales es que en general la solución depende del camino de carga. Por tanto, para estimar el error es necesario conocer toda la “trayectoria” de la solución.

En este ámbito han sido punteros los trabajos en problemas de localización de (Ortiz y Quigley, 1991), los realizados en el contexto del modelo elastoplástico de Hencky (Johnson y Hansbo, 1992), los aplicados a modelos elastoplásticos tanto de Hencky como de Prandtl-Reuss en (Barthold et al., 1998), y los desarrollados en el contexto de la localización en modelos de Cosserat (Perić et al., 1994). También son destacables los basados en técnicas de dualidad de (Bänsch y Siebert, 1995), los correspondientes a problemas de incompresibilidad y de conformado de metales (Zienkiewicz et al., 1988; Zienkiewicz et al., 1989), etc.

Por último cabe destacar el trabajo reciente sobre estimación de error para problemas altamente no lineales de (Radovitzky y Ortiz, 1998). En él se abordan problemas en el contexto de las grandes deformaciones para hiperelasticidad, viscoplasticidad, dinámica, etc. Los resultados que se presentan

en este capítulo se basan fundamentalmente en la metodología seguida en dicha referencia.

En los siguientes párrafos se presentan, a modo de resumen, las ideas clave de los trabajos referenciados anteriormente que se han tomado como base de partida en este trabajo.

Estimador de error de (Johnson y Hansbo, 1992)

En este trabajo se propone un estimador de error de carácter general para problemas elípticos o hiperbólicos, lineales o no lineales (aplicado a problemas de elasticidad lineal, plasticidad infinitesimal, ecuación de Burger, etc). En este artículo pretenden unificar trabajos anteriores que abordan la estimación de error en una gama muy amplia de problemas.

El estimador de error propuesto es de tipo residual y su expresión más general es:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{h,p}\| \leq E(h, p, \mathbf{u}_{h,p}, \mathbf{b}) \quad (4.16)$$

Es decir, el error estimado depende de la discretización h , del grado de las funciones de forma p , de la solución obtenida por elementos finitos $\mathbf{u}_{h,p}$ y del término de fuerzas volumétricas \mathbf{b} del problema de contorno. Ciñéndonos en lo sucesivo a los problemas de mecánica de sólidos, \mathbf{b} es el término correspondiente a las fuerzas volumétricas.

En la expresión (4.16), la dependencia de E sobre $\mathbf{u}_{h,p}$ se formula, en términos de la norma de Lebesgue de grado 2 (ver apéndice C), del residuo $\mathbf{R}(\mathbf{u}_{h,p})$. Para el elemento e :

$$E^e = \|\mathbf{u}^e - \mathbf{u}_{h,p}^e\|_{L_2(\Omega^e)} \leq \sum_{j=1}^2 \|h^e C_j^e \mathbf{R}_j^e(\mathbf{u}_{h,p}^e)\|_{L_2(\Omega^e)} \quad (4.17)$$

donde C_j son constantes, y \mathbf{R}_1^e y \mathbf{R}_2^e son los residuos del equilibrio en Ω^e y en $\partial\Omega^e$.

Observación 4.2.3 *La notación \mathbf{R}_j^e expresa de forma compacta los residuos descritos bajo el encabezamiento Estimadores residuales, del apartado 4.2.2, con el siguiente criterio:*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^e &= \mathbf{R}_\Omega^e \\ \mathbf{R}_2^e &= \mathbf{R}_{\partial\Omega}^e \end{aligned}$$

El estimador global de error se plantea como la suma de los estimadores locales:

$$E = \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} E^e$$

Al aplicarlo al problema elastoplástico de Hencky, el estimador de error (4.17) se plantea con la norma de la energía complementaria:

$$\|\mathbf{u}\|_{E^{-1}} = \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2\mu} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} + \frac{1}{9\lambda + 6\mu} (\text{traza } \boldsymbol{\sigma})^2 \right) d\Omega \right)^{1/2} \quad (4.18)$$

donde \mathbf{s} es el desviador del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$. Para estimar el error, en el dominio Ω se distinguen los elementos que están en estado elástico de los que están en estado plástico:

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{elas}} &= \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \|\mathbf{s}\| \leq \sigma_Y\} \\ \Omega_{\text{plas}} &= \Omega / \Omega_{\text{elas}}\end{aligned}$$

La expresión del estimador de error en el elemento e es:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{E^{-1}}^e &\leq \left(\sum_{j=1}^2 \|h^e C_j^e \mathbf{R}_j^e(\mathbf{u}_{h,p}^e)\|_{L_2(\Omega_{\text{elas}}^e)}^2 + C^s \sum_{j=1}^2 \|h^e C_j^e \mathbf{R}_j^e(\mathbf{u}_{h,p}^e)\|_{L_\infty(\Omega_{\text{plas}}^e)} \right)^{1/2}\end{aligned}\quad (4.19)$$

siendo C_j^e y C^s constantes. La expresión (4.19) indica que $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{E^{-1}} \leq o(h) + o(\sqrt{h})$ estando relacionados los términos $o(h)$ y $o(\sqrt{h})$ con Ω_{elas} y Ω_{plas} , respectivamente. Por tanto es de esperar que para $h \rightarrow 0$ el error sea mayor en los elementos que están en régimen plástico.

El modelo de Hencky no es adecuado para problemas de plasticidad en general debido a sus limitaciones: las deformaciones plásticas sólo dependen del valor del desviador de tensiones \mathbf{s} y no de la historia de carga. Este hecho hace que a veces este modelo se interprete como un *modelo elástico no lineal con tensión de fluencia*, dado que en los procesos de descarga las deformaciones plásticas son nulas.

Observación 4.2.4 *El estado final de deformaciones plásticas en el modelo de Hencky está dado por la expresión:*

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = c\mathbf{s} \quad (4.20)$$

mientras que en la plasticidad de Von-Mises las deformaciones plásticas se expresan en forma de tasa:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}\mathbf{s} \quad (4.21)$$

dependiendo el multiplicador plástico γ de la historia de cargas

Indicador de error de (Barthold et al., 1998)

En este trabajo, los autores presentan un indicador de error aplicable a modelos plásticos de Hencky y Prandtl-Reuss con endurecimiento no lineal. El interés de este indicador es que es aplicable a una gama relativamente amplia de problemas no lineales, y que combina la utilización de diversas técnicas, algunas de las cuales se han descrito en apartados anteriores.

Se parte de la integral de la potencia tensional:

$$\int_0^t \dot{\mathcal{P}} dt = \int_0^t (\dot{\Psi} + \mathcal{D}^p + \dot{\gamma}f) dt = \Psi + \int_0^t (\mathcal{D}^p + \dot{\gamma}f) dt \quad (4.22)$$

siendo \mathcal{D}^p la función de disipación plástica. Atendiendo a los sumandos del término derecho de (4.22), para calcular el error global se considera la contribución de las siguientes fuentes de error:

1. Error en el equilibrio.
2. Error en la tasa de deformación plástica, evaluado de forma incremental.
3. Error en las condiciones de Kuhn-Tucker para las condiciones de carga y descarga, que también se evalúa de forma incremental.
4. Error asociado al tamaño del paso de integración de las ecuaciones constitutivas.

A continuación se describe brevemente el tratamiento que le dan los autores de dicho trabajo a cada uno de los errores mencionados:

– **Error en el equilibrio**

Este error se obtiene con el primer sumando Ψ de la expresión (4.22). Su expresión es:

$$E_{eq}^2 = \|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_h^e)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|(\mathbf{q} - \mathbf{q}_h) \cdot (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_h)\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (4.23)$$

siendo \mathbf{q} y $\boldsymbol{\xi}$ las variables internas de endurecimiento. Dado que en (4.23) hay términos desconocidos, este error se evalúa con estimadores residuales del tipo de los propuestos por otros autores (Babuška y Rheinboldt, 1978a; Johnson y Hansbo, 1992)

– **Error incremental de la tasa de deformación plástica**

Este error va asociado al término de la función de disipación plástica \mathcal{D}^p de la expresión (4.22). Este error se expresa:

$$E_{dp}^2 = \|\boldsymbol{\sigma} \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_h^p)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{q} \cdot (\dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\boldsymbol{\xi}}_h)\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (4.24)$$

Este error se calcula sustituyendo los campos exactos por una proyección suave de la solución aproximada (Zienkiewicz y Zhu, 1987), resultando:

$$E_{dp}^2 = \|\boldsymbol{\sigma}^* \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_h^p)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{q}^* \cdot (\dot{\boldsymbol{\xi}}^* - \dot{\boldsymbol{\xi}}_h)\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (4.25)$$

Observación 4.2.5 *En el estimador de error propuesto en (Perić et al., 1994), se evalúan conjuntamente la falta de equilibrio y la disipación plástica empleando técnicas de proyección suave:*

$$E^2 = \|(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_h^p)\|_{L_2(\Omega)}^2$$

– **Error en las condiciones de Kuhn-Tucker**

Este error se asocia al tercer sumando de (4.22). La expresión de este término de error es:

$$E_{KT} = \int_0^t \int_{\Omega} (\dot{\gamma}f - \dot{\gamma}_h f_h)^2 d\Omega dt = \int_0^t \int_{\Omega} (\dot{\gamma}_h f_h)^2 d\Omega dt \quad (4.26)$$

– **Error asociado a la discretización en el tiempo**

Al integrar numéricamente las ecuaciones constitutivas de la plasticidad con esquemas de tipo “Euler implícito”, aparece un error adicional en cada intervalo $[t, t + \Delta t]$.

Observación 4.2.6 *Este error no aparece en el modelo de Hencky ya que, como se ha comentado anteriormente, en la regla de flujo no interviene el tiempo.*

El error asociado a la discretización temporal se expresa:

$$E_t^2 = \|\boldsymbol{\sigma}\|_{L_2(\Omega)} \left\| \int_t^{\cdot} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \right\|_{L_2(\Omega)} \quad (4.27)$$

donde el factor $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{L_2(\Omega)}$ se puede interpretar como un factor de escala que se introduce para que E_t^2 tenga dimensión de energía.

Suponiendo que el error de discretización espacial no afecta al error de la discretización temporal, en (4.27) se pueden sustituir $\boldsymbol{\sigma}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ por $\boldsymbol{\sigma}_h$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_h^p$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_h^p$, respectivamente. Para acotar este error en el intervalo $[t, t + \Delta t]$, se opera la expresión (4.27) y se hacen las sustituciones descritas, llegando a:

$$\begin{aligned} E_t^2 &= \|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{L_2(\Omega)} \left\| \int_t^{t+\Delta t} \dot{\gamma} \mathbf{n} dt - \Delta t \gamma_{t+\Delta t} \mathbf{n}_{t+\Delta t} \right\|_{L_2(\Omega)} \\ &= \|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{L_2(\Omega)} \left\| \int_t^{t+\Delta t} (\dot{\gamma} \mathbf{n} - \gamma_{t+\Delta t} \mathbf{n}_{t+\Delta t}) dt \right\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{L_2(\Omega)} \int_t^{t+\Delta t} \|\dot{\gamma} \mathbf{n} - \gamma_{t+\Delta t} \mathbf{n}_{t+\Delta t}\|_{L_2(\Omega)} dt \\ &\leq \|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{L_2(\Omega)} \Delta t \max_{\tau \in [t, t+\Delta t]} \|\dot{\gamma} \mathbf{n}(\tau) - \gamma_{t+\Delta t} \mathbf{n}_{t+\Delta t}\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

siendo \mathbf{n} la dirección del flujo plástico, que coincide con el versor normal a la superficie de fluencia en el caso asociativo. Finalmente, haciendo las siguientes hipótesis:

1. En el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ la diferencia entre $\mathbf{n}(\tau)$ y $\mathbf{n}_{t+\Delta t}$ es máxima en $\tau = t$
2. En el peor de los casos $\dot{\gamma} = \gamma_{t+\Delta t}$

el error de discretización temporal es:

$$E_t^2 = \gamma_{t+\Delta t} \|\mathbf{n}_t - \mathbf{n}_{t+\Delta t}\| \Delta t \quad (4.29)$$

Una vez efectuados estos cálculos, el error global de discretización es

$$E^2 = E_{eq}^2 + E_{dp}^2 + E_{KT}^2 + E_t^2 \quad (4.30)$$

Los autores aplican este indicador al problema de una placa rectangular con un taladro circular, y extraen las siguientes conclusiones en cuanto a la contribución de cada término de error:

1. E_{eq} y E_{dp} aumentan en las zonas próximas a los puntos singulares (que en general son las zonas donde las deformaciones plásticas son mayores).
2. E_{KT} predomina en las zonas de transición entre los dominios elásticos y los plásticos.
3. E_t es mayor en los elementos que comienzan a plastificar.

Estimador de error de (Radovitzky y Ortiz, 1998)

Este estimador tiene dos atractivos especiales:

1. Plantea la estimación de error de problemas lineales y no lineales con la misma metodología, ya que en todos los casos parte de un principio variacional de mínimo:

$$\Pi(\boldsymbol{\varphi}_{t+\Delta t}) = \inf_{\boldsymbol{\psi} \in V_h} \Pi(\boldsymbol{\psi}) \quad (4.31)$$

siendo Π el funcional asociado al principio variacional, $\boldsymbol{\varphi}_{t+\Delta t}$ el movimiento en el instante $t + \Delta t$ y V_h el espacio de las funciones solución admisibles.

2. Hay ejemplos de problemas estáticos y dinámicos altamente no lineales, para plasticidad y visco-plasticidad con grandes deformaciones, en los que se ha probado que es eficiente.

La idea clave en los problemas con deformaciones inelásticas es integrar las ecuaciones constitutivas con una formulación variacional. Dicha formulación conduce a una relación de las tasas tensión-deformación que deriva de una función potencial incremental. Esta formulación de “integración variacional” se ha propuesto recientemente en (Ortiz y Stainier, 1998)

Observación 4.2.7 *Anteriormente se habían propuestos algoritmos de integración de las ecuaciones de la plasticidad, con estructura variacional, empleando la teoría de los “camino minimizantes” (camino de deformación que minimizan la energía interna) (Ortiz y Martin, 1988). El inconveniente de estas teorías es la dificultad para establecer los caminos minimizantes en ciertos modelos constitutivos (especialmente en los modelos que dependen del tiempo).*

La metodología de estimación de error propuesta en esta tesis se basa fundamentalmente en los trabajos de (Ortiz y Quigley, 1991; Radovitzky y Ortiz, 1998), y se detalla en los siguientes apartados. A continuación se resumen las ideas clave del estimador de error.

Partiendo de un problema variacional de mínimo cuya incógnita es la función φ , la propiedad de aproximación óptima permite establecer:

$$\|\varphi_h - \varphi\| = \min_{\boldsymbol{\eta}_h \in V_h} \|\boldsymbol{\eta}_h - \varphi\| \quad (4.32)$$

donde φ_h es la solución aproximada de elementos finitos. Por otra parte, la estructura variacional del problema permite establecer una forma de Dirichlet $a(\varphi_{n+1})[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$ (que expresa la segunda variación del funcional asociado al principio variacional, como se indica en el apéndice C) que verifica, al menos en el régimen asintótico ($h \rightarrow 0$), la condición de coercividad:

$$a(\varphi_{n+1})[\varphi, \varphi] \geq C_1 \|\varphi\|^2 \quad (4.33)$$

Verificándose (4.32) y (4.33), es posible acotar el error de discretización en la forma (Ciarlet, 1978):

$$\|\varphi_h - \varphi\|_1 \leq C_2 \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} (h^e)^k |\varphi^e|_{k+1} \quad (4.34)$$

siendo:

- k : grado de los polinomios interpolantes de \mathbf{u}_h
- h^e : tamaño del elemento
- n_{elm} : número de elementos
- $\|\cdot\|_1$: norma de Sobolev de grado 1 (ver apéndice C)
- $|\cdot|_{k+1}$: seminorma de Sobolev de grado $k+1$ (ver apéndice C)

Aunque φ_h^e sea una buena aproximación de φ^e , no se puede sustituir en el lado derecho de la ecuación (4.34), ya que $|\varphi_h^e|_{k+1} = 0$ por ser φ_h^e un polinomio de grado k . Entonces, en vez de estimar el error de φ_h^e se estima el error de $\tilde{\varphi}_h^e$, que es la proyección de grado $k-1$ de φ_h^e sobre el elemento e :

$$\|\tilde{\varphi}_h - \varphi\|_1 \leq \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_1 + \|\varphi_h - \varphi\|_1 \quad (4.35)$$

Como los órdenes de convergencia de los dos sumandos de (4.35) son, respectivamente, $o(h^{k-1})$ y $o(h^k)$, en el régimen asintótico se puede poner:

$$\|\tilde{\varphi}_h - \varphi\|_1 \leq C_3 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_1 \quad (4.36)$$

y sustituyendo la norma de la derecha de (4.36) en (4.34), resulta finalmente:

$$\|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_1 \leq C_4 \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} (h^e)^k |\varphi^e|_k \quad (4.37)$$

Observación 4.2.8 *El estimador de error (4.37) se construye sumando los errores locales en cada elemento. De esta manera se evita el coste computacional asociado a los procedimientos de suavizado global*

4.3. Elasticidad Infinitesimal

4.3.1. Problema de contorno

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, abierto y suave, con frontera $\partial\Omega$. Sea $\partial_u\Omega$ la frontera de Ω con desplazamientos impuestos $\bar{\mathbf{u}}$ y $\partial_t\Omega$ la frontera de Ω con tensiones impuestas $\bar{\mathbf{t}}$, tal que $\partial_u\Omega \cup \partial_t\Omega = \Omega$ y $\partial_u\Omega \cap \partial_t\Omega = \emptyset$. Denominaremos $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ y \mathbf{n} al vector normal a $\partial\Omega$. Sea \mathbf{b} el vector de fuerzas volumétricas, \mathbf{u} el campo de desplazamientos, $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones de Cauchy, $\boldsymbol{\varepsilon}$ el tensor de deformaciones infinitesimales y $W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ la función de densidad de energía elástica.

El problema de contorno de la elasticidad infinitesimal queda planteado en los siguientes términos:

Dadas $\mathbf{b} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{u}} : \partial_u\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{t}} : \partial_t\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, encontrar $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que cumpla las ecuaciones:

$$\text{Ecuaciones de Equilibrio: } \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega \quad (4.38)$$

$$\text{con } \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ en } \partial_t\Omega \quad (4.39)$$

$$\text{Ecuaciones de Compatibilidad: } \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \partial_u\Omega \quad (4.41)$$

$$\text{Ecuaciones Constitutivas: } \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.42)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{t}}$, son los desplazamientos y tensiones prescritos, y $\nabla^S[\cdot]$ es la parte simétrica del operador gradiente $\nabla[\cdot]$.

4.3.2. Estructura variacional del problema de contorno

El teorema de Veinberg (ver apéndice C, teorema C.7.6) aplicado al problema de contorno expresado en el apartado 4.3.1 permite obtener las condiciones necesarias para que dicho problema tenga estructura variacional y, en su caso, el funcional correspondiente.

Las ecuaciones (4.38; 4.39; 4.40; 4.41; 4.42) se pueden expresar mediante un operador diferencial \mathbf{A} , resultando:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (4.43)$$

donde:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{cases} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \nabla^S \mathbf{u}) + \mathbf{b} & \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \nabla^S \mathbf{u}) \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{u}) & \text{en } \partial_t\Omega \end{cases} \quad (4.44)$$

Las condiciones necesarias para que el problema de contorno tenga estructura variacional se obtienen aplicando la condición de reciprocidad:

$$\delta G(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v}] = \delta G(\mathbf{u})[\delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{u}] \quad \forall \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ admisibles} \quad (4.45)$$

donde $G(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}]$ es la forma débil de $\mathbf{A}(\mathbf{u})$:

$$G(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}] = \int_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega$$

y $\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v}$ son variaciones admisibles:

$$\delta \mathbf{u}|_{\partial_u \Omega} = \delta \mathbf{v}|_{\partial_u \Omega} = \mathbf{0}$$

Operando los dos miembros de (4.45) se obtiene:

$$\delta G(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v}] = \int_{\Omega} \delta \nabla \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \delta \nabla \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (4.46)$$

$$\delta G(\mathbf{u})[\delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{u}] = \int_{\Omega} \delta \nabla \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \delta \nabla \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (4.47)$$

e identificando (4.46) y (4.47), resulta en componentes:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0 \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \bar{t}_i}{\partial u_j} - \frac{\partial \bar{t}_j}{\partial u_i} = 0 \quad (4.49)$$

Las ecuaciones (4.48; 4.49) establecen la nulidad del operador rotacional aplicado a los campos de tensiones en Ω y tracciones en $\partial_t \Omega$, respectivamente. Por tanto, para que el problema de contorno tenga estructura variacional es necesario que $\boldsymbol{\sigma}$ y $\bar{\mathbf{t}}$ deriven de un potencial:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{u}, \cdot)}{\partial \mathbf{u}} \quad (4.51)$$

La expresión del funcional correspondiente también se obtiene mediante el teorema de Veinberg:

$$\begin{aligned} \Pi_p(\mathbf{u}) &= \int_0^1 G(t\mathbf{u})[\mathbf{u}] \, dt \\ &= \int_0^1 \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t \nabla^s \mathbf{u}) \nabla \mathbf{u} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}}(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma \right] \, dt \end{aligned} \quad (4.52)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t \nabla^s \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{u} &= \frac{\partial W(\mathbf{x}, t \nabla^s \mathbf{u})}{\partial t} \\ \bar{\mathbf{t}}(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} &= \frac{\partial \Phi(t\mathbf{u})}{\partial t} \end{aligned}$$

operando en (4.52), se obtiene finalmente:

$$\Pi_p(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (W(\mathbf{x}, \nabla^s \mathbf{u}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \Phi(\mathbf{u}) d\Gamma \quad (4.53)$$

Igualando a cero la primera variación de $\Pi_p(\mathbf{u})$:

$$\delta \Pi_p(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}] = a(\mathbf{u})[\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}] - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V \quad (4.54)$$

se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema variacional, que son precisamente las ecuaciones (4.38; 4.39).

Observación 4.3.1 La expresión del operador $a(\mathbf{u})[\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}]$ es:

$$a(\mathbf{u})[\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}] = \int_{\Omega} \frac{\partial W(\mathbf{x}, \nabla^s \mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \delta \nabla \mathbf{u} d\Omega \quad (4.55)$$

La forma de Dirichlet de $\Pi_p(\mathbf{u})$ se obtiene haciendo la segunda variación en (4.53), y resulta:

$$a(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}] = \int_{\Omega} \delta \nabla \mathbf{u} \cdot \frac{\partial^2 W(\mathbf{x}, \nabla^s \mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \delta \nabla \mathbf{u} d\Omega \quad (4.56)$$

El tensor:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{x}, \nabla^s \mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.57)$$

se denomina tensor constitutivo de módulos tangentes y sus componentes se denotarán por \mathbf{C}_{ijkl} . Se dice que la forma de Dirichlet cumple las hipótesis de regularidad si se verifica:

$$1. \mathbf{C}_{ijkl} < \infty, \forall \mathbf{x} \in \Omega \Leftrightarrow \mathbf{C} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \quad (4.58)$$

$$2. a(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}] \text{ es estable (ver definición C.7.6)} \quad (4.59)$$

Observación 4.3.2 Para que $a(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}]$ sea estable, se ha de verificar que tenga un mínimo (condición de coercividad):

$$a(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}] > C(\|\delta \mathbf{u}\|_{1,2})^2 \quad C \in \mathbb{R}^+ \quad (4.60)$$

siendo $\|\cdot\|_{1,2}$ la norma de Sobolev de grado 1, orden 2. Esta desigualdad se cumple si:

1. $\|\delta \mathbf{u}\|_{1,2}$ está acotado. Esta condición se verifica tomando $\delta \mathbf{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (Espacio de Sobolev de grado 1 y orden 2).
2. $a(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}] > 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$. La condición necesaria y suficiente es que el tensor \mathbf{C} sea definido positivo.

Si la forma de Dirichlet (4.56) verifica las hipótesis de regularidad (4.58, 4.59), entonces se cumple:

- i) Π_p es convexo
- ii) Π_p tiene un mínimo y es único; es decir, la solución \mathbf{u} del problema de contorno verifica:

$$\Pi_p(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in V} \Pi_p(\mathbf{v}) \quad (4.61)$$

siendo V el espacio de funciones de energía finita.

Estas dos condiciones tienen especial relevancia para la estimación del error, dado que son condición necesaria para poder establecer la cota de error que se emplea en este trabajo.

4.3.3. Metodología de aproximación

Sea $V_h \subset V$ | $\dim(V_h) < \infty$ y $V_h \rightarrow V$ cuando $h \rightarrow 0$. El método de los elementos finitos define una metodología de construcción de V_h . El problema planteado en (4.61) se resuelve buscando la solución en el espacio de dimensión finita V_h :

$$\Pi_p(\mathbf{u}_h) = \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \Pi_p(\mathbf{v}_h) \quad (4.62)$$

$$\mathbf{u}_h = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \partial_u \Omega \quad (4.63)$$

En el caso de la elasticidad lineal, la ecuación variacional del problema de contorno discretizado es:

$$a(\mathbf{u})[\mathbf{u}_h, \delta \mathbf{u}_h] - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_h d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u}_h d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}_h \in V_h \quad (4.64)$$

Como $V_h \subset V$, en (4.54) se verifica:

$$a(\mathbf{u})[\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}_h] - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}_h d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u}_h d\Gamma = 0 \quad (4.65)$$

Restando (4.64) y (4.65) se obtiene:

$$a(\mathbf{u})[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \delta \mathbf{u}_h] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}_h \in V_h \quad (4.66)$$

La ecuación (4.66) establece que la solución de elementos finitos minimiza $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E$, y se denomina *propiedad de aproximación óptima* del método de elementos finitos:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E = \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_E \quad (4.67)$$

En la figura 4.2 se da una interpretación geométrica de esta propiedad para el caso particular en que $\dim V = 2$ y $\dim V_h = 1$.

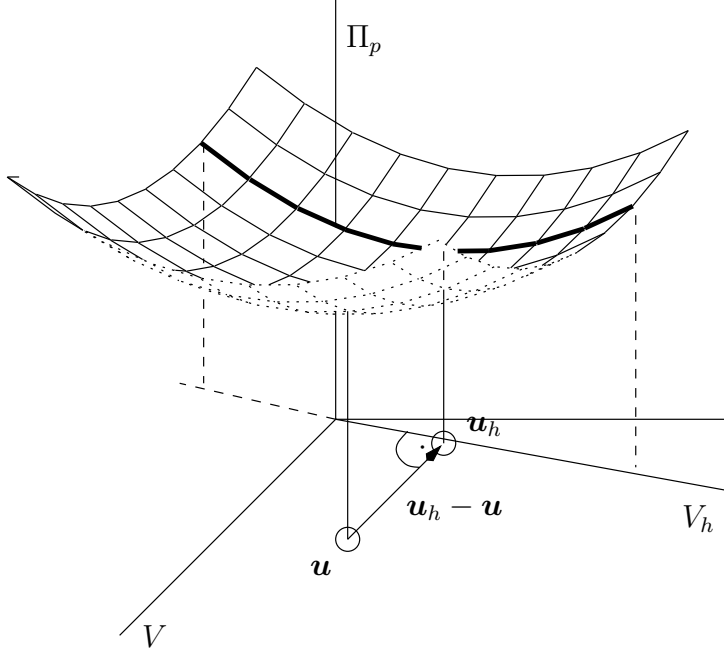


Figura 4.2: Interpretación geométrica de la propiedad de aproximación óptima del MEF

4.3.4. Estimación local del error

Sea Ω^e un elemento no degenerado en \mathbb{R}^n y $\mathbb{P}_p(\Omega^e)$ el conjunto de polinomios de grado p en Ω^e . Sea $\mathbf{u}^e \in H^1(\Omega^e, \mathbb{R}^n)$ el campo de desplazamientos exacto en el elemento e , y

$$\mathbf{u}_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{n_{\text{nod}}} \mathbf{u}_a N_a(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}_p(\Omega^e) \quad (4.68)$$

el polinomio interpolante de \mathbf{u}^e . La función de error local en el elemento e se define como la diferencia del campo de desplazamientos exacto y el campo de desplazamientos calculado por elementos finitos:

$$\mathbf{E}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^e(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h^e(\mathbf{x})$$

El problema que se plantea en la estimación local del error es obtener una cota de la función local de error, del tipo:

$$\|\mathbf{u}^e - \mathbf{u}_h^e\| \leq C(h^e)^\alpha |\mathbf{u}^e| \quad (4.69)$$

donde:

C : constante real positiva

h^e : diámetro de la circunferencia circunscrita a Ω^e

$|\mathbf{u}^e|$: seminorma de \mathbf{u}^e

α : tasa de convergencia

Observación 4.3.3 La definición de la seminorma utilizada en (4.69) depende de la definición de la norma de error que se establezca.

La expresión (4.69) se verifica si se cumple la propiedad de aproximación óptima (4.67) y las condiciones de regularidad expresadas en (4.58) y (4.59) (Ciarlet, 1978). El siguiente teorema (Ciarlet, 1978) da una expresión de la cota de error:

Teorema 4.3.1

Siendo:

C : constante positiva independiente de \mathbf{u}^e y h

$m(\Omega^e)$: volumen de Ω^e

ρ : diámetro de la circunferencia inscrita en Ω^e

$|\mathbf{u}^e|_{k+1,p}$: seminorma de Sobolev de grado $k+1$ y orden p

y los espacios funcionales (ver apéndice C):

$W^{k+1,p}(\Omega^e, \mathbb{R}^n)$: Espacio de Sobolev de grado $k+1$ y orden p

$H^{k+1}(\Omega^e, \mathbb{R}^n)$: Espacio de Sobolev de grado $k+1$ y orden 2

se cumple que:

$$\forall \mathbf{u}_h^e \in W^{k+1,p}(\Omega^e, \mathbb{R}^n) \exists C \quad | \quad |\mathbf{u}^e - \mathbf{u}_h^e|_{s,q} \leq C [m(\Omega^e)]^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \frac{(h^e)^{k+1}}{(\rho^e)^s} |\mathbf{u}^e|_{k+1,p} \quad (4.70)$$

siempre que se satisfagan las siguientes condiciones:

I) El polinomio interpolante \mathbf{u}_h^e es completo hasta el grado k

$$\text{II)} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k+1-s}{n}$$

$$\text{III)} \quad \frac{n}{p} > k+1-s$$

Observación 4.3.4 En la expresión de la cota de error (4.70), el término $|\mathbf{u}^e|_{k+1,p}$ cuantifica la variación del campo de desplazamientos en el elemento e .

Observación 4.3.5 Si se emplean elementos cuadriláteros bilineales y la norma de la cota de error es la norma energética: $\mathbf{u}_h^e \in H^1(\Omega^e, \mathbb{R}^n) = W^{1,2}(\Omega^e, \mathbb{R}^n)$, resulta:

$$q = p = 2 \quad s = 1 \quad k = 1 \quad (4.71)$$

Sustituyendo (4.71) en (4.70), la expresión de la cota de error es:

$$\forall \mathbf{u}_h^e \in H^1(\Omega^e, \mathbb{R}^n) \exists C \quad | \quad |\mathbf{u}^e - \mathbf{u}_h^e|_{1,2} \leq C \frac{(h^e)^2}{\rho^e} |\mathbf{u}^e|_{2,2} \quad (4.72)$$

4.3.5. Estimación global del error

Definición 4.3.1 (Polinomio interpolante global)

Siendo:

$$\mathbf{u}_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{n_{nod}} \mathbf{u}_a N_a(\mathbf{x})$$

los polinomios interpolantes de $\mathbf{u}^e(\mathbf{x})$, se define el Polinomio interpolante global $\mathbf{u}_h(\mathbf{x})$ como:

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n_{elm}} \chi^e \mathbf{u}_h^e(\mathbf{x})$$

donde χ^e es la función característica definida en (2.33). Si las funciones de forma N_a cumplen la condición de conformidad (Hughes, 1987), se cumple: $\mathbf{u}_h^e(\mathbf{x}) \in H^1(\omega^e, \mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega^e, \mathbb{R}^n)$.

Para obtener una cota de la función de error global: $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x})$, la seminorma de $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ empleada en (4.69) se expresa como la suma de las contribuciones de cada elemento:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{s,p}^2 &= \left(\sum_{|\alpha|=0}^s \int_{\Omega} |D^{|\alpha|} \mathbf{u} - D^{|\alpha|} \mathbf{u}_h|^p d\Omega \right)^{\frac{2}{p}} \\ &= \sum_{e=1}^{n_{elm}} \left(\sum_{|\alpha|=0}^s \int_{\Omega^e} |D^{\alpha} \mathbf{u}^e - D^{\alpha} \mathbf{u}_h^e|^p d\Omega \right)^{\frac{2}{p}} = \sum_{e=1}^{n_{elm}} |\mathbf{u}^e - \mathbf{u}_h^e|_{s,p}^2 \end{aligned} \quad (4.73)$$

donde n_{elm} es el número de elementos empleado en la discretización de Ω . Particularizando (4.73) para la norma de la energía:

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,2}^2 = \sum_{e=1}^{n_{elm}} |\mathbf{u}^e - \mathbf{u}_h^e|_{1,2}^2 \quad (4.74)$$

y sustituyendo la expresión de la cota de error local dada en (4.72):

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,2}^2 \leq \sum_{e=1}^{n_{elm}} \left(C \frac{(h^e)^2}{\rho^e} |\mathbf{u}^e|_{2,2} \right)^2 \Rightarrow |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,2} \leq \sum_{e=1}^{n_{elm}} C \frac{(h^e)^2}{\rho^e} |\mathbf{u}^e|_{2,2} \quad (4.75)$$

La expresión (4.75) indica que la cota del error global se puede expresar como la suma de las cotas de error de cada elemento. Asimismo, asumiendo la hipótesis de regularidad y en virtud de la desigualdad de Poincaré, la seminorma $|\cdot|_{1,2}$ se puede sustituir en (4.75) por la norma de la energía, resultando:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \leq C \sum_{e=1}^{n_{elm}} \frac{(h^e)^2}{\rho^e} |\mathbf{u}^e|_{2,2} \quad (4.76)$$

4.3.6. Estimación del error “a posteriori”

Las expresiones anteriores tienen el inconveniente práctico de acotar el error en función del campo \mathbf{u}^e que es la incógnita básica del problema y de la que sólo se conoce la solución aproximada \mathbf{u}_h^e . Esta solución no puede sustituirse directamente por \mathbf{u}^e dado que \mathbf{u}_h^e es un polinomio de grado k y la seminorma empleada es de orden $k+1$ ($D^\alpha \mathbf{u}_h^e = 0$ para $|\alpha| = k+1$)

Las técnicas de estimación de error se basan en la sustitución de \mathbf{u}^e por otro campo, de manera que la cota de error así calculada sea realista. La forma de realizar dicha sustitución da lugar a distintos estimadores de error.

Observación 4.3.6 *Los estimadores basados en las técnicas de suavizado global, como por ejemplo el estimador Z^2 (Zienkiewicz y Zhu, 1987), al suavizar el campo de tensiones aumentan el grado del campo de desplazamientos. Este campo de desplazamientos de orden superior es el que se introduce en la expresión (4.76) en lugar de el campo exacto \mathbf{u}^e .*

4.3.7. Estimador de error propuesto en este trabajo

En este trabajo se propone un estimador de error para la solución \mathbf{u}_h obtenida con elementos formulados en desplazamientos, que se basa en la solución \mathbf{u}_{enh} obtenida con elementos de deformaciones supuestas mejoradas (Simó y Rifai, 1990; Simó y Armero, 1993) descritos en el capítulo 2. Se parte de la propiedad de la desigualdad triangular:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{enh}}\|_E + \|\mathbf{u}_{\text{enh}} - \mathbf{u}_h\|_E \quad (4.77)$$

A continuación es necesario establecer la siguiente hipótesis:

Hipótesis 4.3.1 *Se supone que los órdenes de convergencia son:*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{enh}}\|_E = o(h^m) \quad (4.78)$$

$$\|\mathbf{u}_{\text{enh}} - \mathbf{u}_h\|_E = o(h^p) \quad (4.79)$$

y que, al menos en el régimen asintótico, se cumple:

$$m > p \quad (4.80)$$

En el caso límite del régimen asintótico ($h \rightarrow 0$), en la parte derecha de la expresión (4.77) el primer sumando es mucho menor que el segundo, pudiéndose establecer que:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \leq C \|\mathbf{u}_{\text{enh}} - \mathbf{u}_h\|_E, \quad C \in \mathbb{R}^+ \quad (4.81)$$

Observación 4.3.7 *Las hipótesis (4.78), (4.79) y (4.80) garantizan que las soluciones \mathbf{u}_{enh} y \mathbf{u}_h convergen a la solución exacta, de manera que:*

1. $\|\mathbf{u}_{\text{enh}} - \mathbf{u}_h\|_E$ decrece según se refina la malla
2. La solución obtenida con los elementos mejorados \mathbf{u}_{enh} se aproxima a la solución exacta \mathbf{u} “mejor” que la solución de elementos en desplazamientos \mathbf{u}_h a la solución de elementos mejorados \mathbf{u}_{enh} , al menos en régimen asintótico.

Observación 4.3.8 El estimador de error (4.81) aplicado a los estados de deformación que corresponden a la prueba de la parcela (estados de deformación constante), es nulo y por lo tanto exacto. Dicho estimador aplicado a los estados de flexión pura (para los que los elementos mejorados dan la solución exacta) también da valores exactos.

El estimador local de error que se propone es la norma energética (forma de Dirichlet) de la diferencia entre el campo de desplazamientos calculado con elementos mejorados, y el calculado con elementos compatibles formulados en desplazamientos:

$$E^e = \|\mathbf{u}_{\text{enh}}^e - \mathbf{u}_h^e\|_E \quad (4.82)$$

Para el caso de la elasticidad lineal infinitesimal, la forma de Dirichlet (4.56) se expresa:

$$a(\mathbf{u})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (4.83)$$

siendo \mathbf{C} el tensor constitutivo elástico, que en general dependerá del punto del continuo si el material es heterogéneo. Sustituyendo (4.83) y $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ en (4.82), resulta:

$$(E^e)^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} [(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] \cdot \mathbf{C} [(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{C} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega \quad (4.84)$$

Si se define el error global mediante la integral (4.84) extendida a todo el dominio:

$$E^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{C} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega \quad (4.85)$$

entonces dicho error se puede expresar como suma de los errores elementales:

$$E^2 = \sum_{i=1}^{n_{\text{elm}}} (E^i)^2 \quad (4.86)$$

Observación 4.3.9 La cota del error discretización que se propone en (4.86) tiene como ventaja que es una cota global que se evalúa localmente (elemento por elemento), sin necesidad de tener que calcular suavizados globales

Observación 4.3.10 Interpretando la expresión (4.84), la interpretación práctica de la cota de error propuesta es clara. El error de discretización asociado a los elementos formulados en desplazamientos se cuantifica a través

de la energía elástica asociada a los modos incompatibles, si el problema se resuelve con elementos mejorados.

4.3.8. Ejemplos

En este apartado se muestran los resultados obtenidos al aplicar el estimador de error (4.84) en algunos ejemplos resueltos con elementos finitos.

Ménsula en flexión pura

Se considera una ménsula de longitud $L = 10$ y canto $h = 1$ con un momento $M = 1$ aplicado en el extremo libre (figura 4.3). Las características mecánicas adoptadas son $E = 1200$ y $\nu = 0$.

Con estas condiciones, la energía de deformación calculada analíticamente es:

$$W = \frac{1}{2EI} M^2 L = 0,05 \quad (4.87)$$

Con los elementos de deformaciones supuestas un sólo elemento basta para obtener la solución exacta en flexión pura (Simó y Rifai, 1990). Sin embargo, en los elementos de cuatro nodos con formulación en desplazamientos, aparece bloqueo por cortante y la solución resulta excesivamente rígida en mallas con pocos elementos. En este caso, la expresión (4.81) se transforma en una igualdad con $C = 1$

Las mallas consideradas para estimar el error tienen 1×1 , 2×2 , 4×4 , 16×16 , 32×32 , 64×64 y 80×80 elementos.

A continuación, para comprender el funcionamiento del estimador de error propuesto, se discuten los resultados obtenidos con la malla de 1 elemento. En los cuadros 4.1 y 4.2 se muestran los valores de las deformaciones obtenidas con los elementos mejorados y con los elementos formulados en desplazamientos.

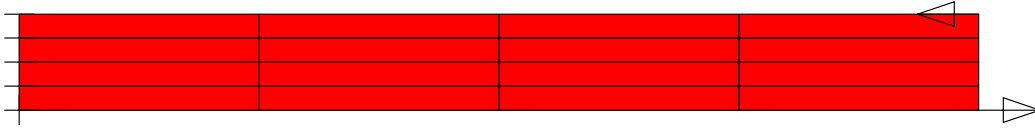


Figura 4.3: Ménsula en flexión pura. Condiciones de contorno y cargas aplicadas. Malla de 4×4 elementos

Punto de Gauss	ε_{xx}	ε_{yy}	ε_{xy}
1	$2,887 \cdot 10^{-3}$	0,0	$2,887 \cdot 10^{-3}$
2	$2,887 \cdot 10^{-3}$	0,0	$-2,887 \cdot 10^{-3}$
3	$-2,887 \cdot 10^{-3}$	0,0	$-2,887 \cdot 10^{-3}$
4	$-2,887 \cdot 10^{-3}$	0,0	$2,887 \cdot 10^{-3}$

Cuadro 4.1: Ménsula en flexión pura. Elementos en desplazamientos. Deformaciones obtenidas con la malla de 1×1 .

Punto de Gauss	ε_{xx}	ε_{yy}	ε_{xy}	$\tilde{\varepsilon}_{xx}$	$\tilde{\varepsilon}_{yy}$	$\tilde{\varepsilon}_{xy}$
1	$2,887 \cdot 10^{-3}$	0,0	0,0	0,0	0,0	$-2,887 \cdot 10^{-3}$
2	$2,887 \cdot 10^{-3}$	0,0	0,0	0,0	0,0	$2,887 \cdot 10^{-3}$
3	$-2,887 \cdot 10^{-3}$	0,0	0,0	0,0	0,0	$2,887 \cdot 10^{-3}$
4	$-2,887 \cdot 10^{-3}$	0,0	0,0	0,0	0,0	$-2,887 \cdot 10^{-3}$

Cuadro 4.2: Ménsula en flexión pura. Elementos mejorados. Deformaciones obtenidas con la malla de 1×1 .

Con los valores expresados en estas dos cuadros, los valores de la energía interna calculados con los elementos en desplazamientos y los elementos mejorados, son respectivamente:

$$W_{\text{dis}} = 2,55 \quad (4.88)$$

$$W_{\text{enh}} = 0,05 \quad (4.89)$$

Sustituyendo en (4.85) los valores de $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ de el cuadro 4.2, la norma energética de la parte mejorada del tensor de deformaciones resulta:

$$W(\tilde{\varepsilon}) = 2,50 \quad (4.90)$$

con lo que el error estimado es:

$$E = \sqrt{W(\tilde{\varepsilon})} = 1,58 \quad (4.91)$$

Observación 4.3.11 *Los resultados obtenidos con los elementos mejorados son exactos en las tensiones, en las deformaciones y en la energía.*

Observación 4.3.12 *Los resultados obtenidos con los elementos formulados en desplazamientos son exactos en tensiones y deformaciones tanto longitudinales como transversales, pero aparecen valores parásitos de la tensión tangencial.*

Observación 4.3.13 *En las deformaciones mejoradas $\tilde{\epsilon}$ la única componente no nula es la correspondiente a las deformaciones tangenciales. El valor obtenido es tal que la deformación total (parte compatible y mejorada) es exacta (se anulan las componentes tangenciales parásitas).*

Observación 4.3.14 *En este ejemplo, el error estimado expresa de manera exacta la diferencia entre las energías de deformación calculadas con los elementos mejorados y compatibles. Este hecho se debe a que la contribución de los modos mejorados afecta únicamente a las deformaciones de corte, estando desacoplada la correspondiente energía de deformación.*

Los resultados obtenidos con las demás mallas se recogen en las figuras 4.4 y 4.5. En la figura 4.4 se muestran en escala doblemente logarítmica, frente al número de grados de libertad, los valores de la energía de deformación teórica $\|\mathbf{u}_{\text{teor}}\|_E$, de la energía de deformación calculada con los elementos mejorados $\|\mathbf{u}_{\text{enh}}\|_E$ y de la calculada con los elementos en desplazamientos $\|\mathbf{u}_h\|_E$. En la figura 4.5, se muestra el valor del error estimado y la recta que correspondería a una tasa de convergencia igual a $1/2$. La curva del error estimado en la figura 4.5, obtenida mediante las expresiones (4.82; 4.86), coincide con la raíz cuadrada de la diferencia entre las curvas $\|\mathbf{u}_h\|_E$ y $\|\mathbf{u}_{\text{enh}}\|_E$ de la figura 4.4.

De acuerdo con estos resultados, se pueden extraer la siguiente conclusión:

Conclusión 4.1 *Dado que en este problema los elementos mejorados proporcionan la solución exacta, el estimador de error (4.84) da un valor exacto del error cometido. Como consecuencia de ello, el error global estimado mediante (4.86) también es exacto.*

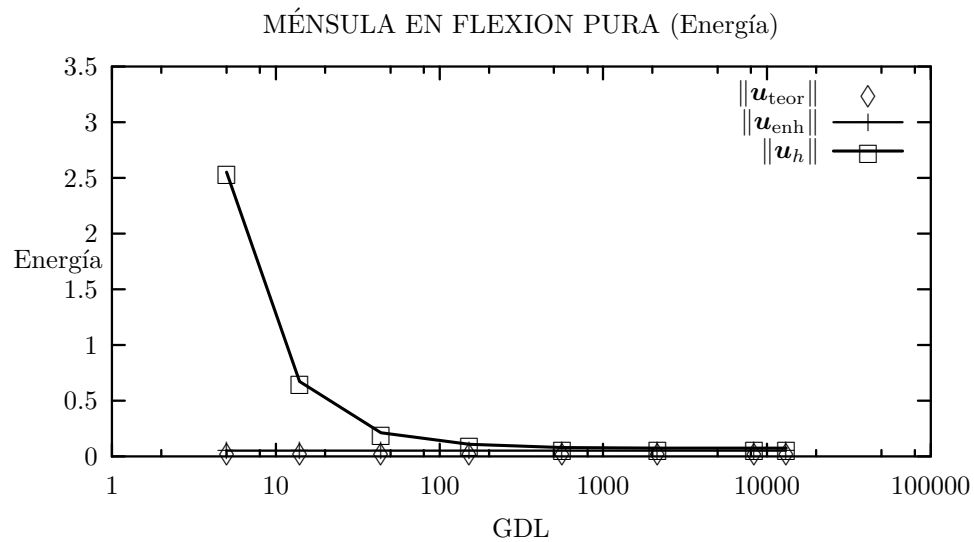


Figura 4.4: Ménsula en flexión pura. Energía de deformación

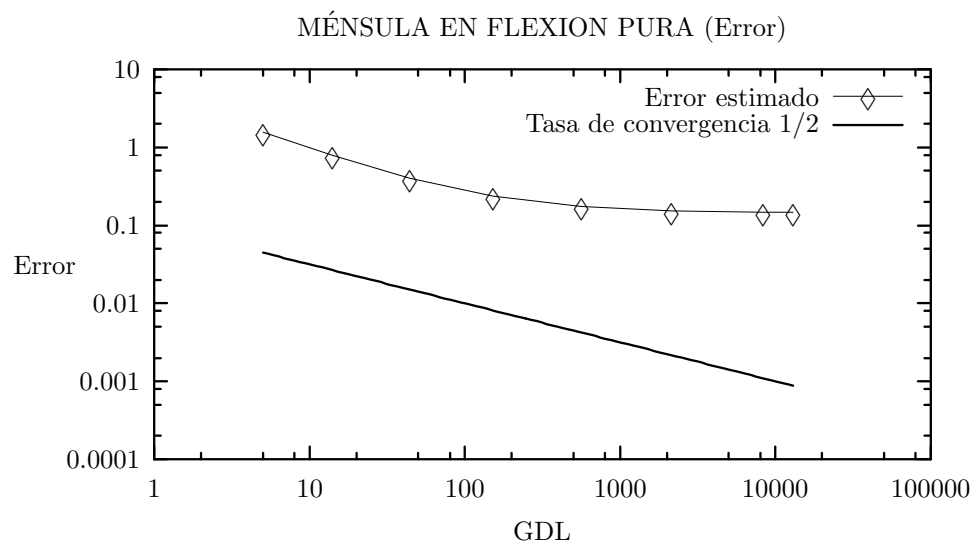


Figura 4.5: Ménsula en flexión pura. Error global

Panel en forma de L

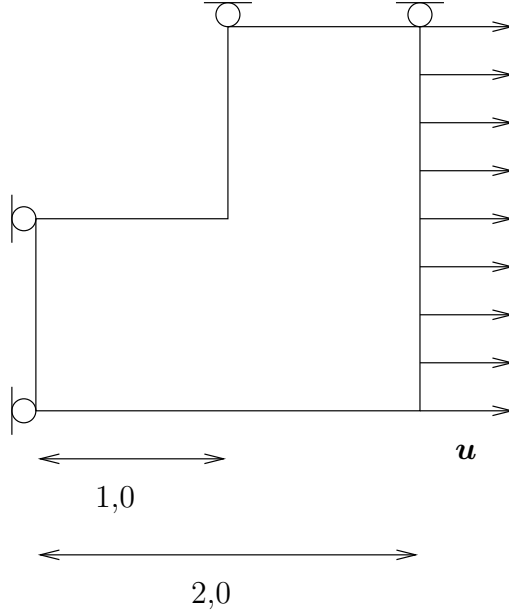


Figura 4.6: *Panel en L. Elasticidad Infinitesimal. Geometría y Condiciones de Contorno.*

Este ejemplo es clásico en la estimación de error (Szabó y Babuška, 1991; Beltrán, 1990; Zienkiewicz y Taylor, 1989). Se trata de una panel con forma de L en deformación plana, con los desplazamientos impuestos en uno de los bordes. La geometría y las condiciones de contorno se muestran en la figura 4.6. Las características mecánicas son $E = 206,9$ y $\nu = 0,29$. El desplazamiento impuesto es $u = 0,4$.

El problema se ha resuelto con mallas de 12, 48, 192, 768, 3072, 4800 y 6075 elementos, con refinamiento uniforme. Se adopta como solución de referencia $\|\mathbf{u}_{\text{ref}}\|$ la obtenida para la malla de 6075 elementos (12329 g.d.l.) empleando elementos mejorados.

En la figura 4.7 se muestran los valores de la energía de deformación frente al número de grados de libertad: los valores calculados con elementos estándar $\|\mathbf{u}_h\|_E$, con elementos mejorados $\|\mathbf{u}_{\text{enh}}\|_E$ y el valor de referencia $\|\mathbf{u}_{\text{ref}}\|_E$.

En la figura 4.8 se muestran el error estimado E mediante la expresión (4.86), el error teórico calculado con las energías $\|\mathbf{u}_{\text{ref}}\|_E$ y $\|\mathbf{u}_h\|_E$:

$$E_{\text{teor}} = \sqrt{\|\mathbf{u}_{\text{ref}}\|_E^2 - \|\mathbf{u}_h\|_E^2} \quad (4.92)$$

y el error relativo (Ainsworth et al., 1989):

$$\eta = \frac{E_{\text{exacto}}}{\|\mathbf{u}\|_E} \approx \frac{E}{\sqrt{\|\mathbf{u}_h\|_E^2 + E^2}} \quad (4.93)$$

donde E_{exacto} es el error exacto y E es el error estimado.

Observación 4.3.15 *El error teórico (4.92) expresa la diferencia entre la energía de referencia (que puede ser considerada exacta si la malla es suficientemente fina) y la energía calculada. Este valor, que tiene la ventaja de tener una interpretación física clara, no es el único que se puede adoptar como valor de referencia: también se podría haber definido el error teórico como:*

$$E_{\text{teor}} = \|\mathbf{u}_{\text{ref}} - \mathbf{u}_h\|_E$$

Este valor, que no tiene porque coincidir con el expresado en (4.92), tiene el inconveniente de que es incómodo de evaluar, sobre todo en problemas no lineales.

Se define el *índice de efectividad* θ (Zienkiewicz y Taylor, 1989) como el cociente del error estimado y el error exacto:

$$\theta = \frac{E}{E_{\text{exacto}}} \quad (4.94)$$

Observación 4.3.16 *Un estimador de error se dice asintóticamente exacto, si el índice de efectividad tiende a 1 cuando el tamaño de los elementos h tiende a cero. Dado que en la práctica el tamaño de los elementos no tiende a cero y tampoco se conoce la energía exacta, la calidad de la solución se suele medir con el error relativo η definido en (4.93). Un criterio ingenieril generalmente aceptado es adoptar la solución como válida si el error relativo η es menor del 5% (Ainsworth et al., 1989).*

En el cuadro 4.3 se muestran los valores del índice de efectividad θ (suponiendo $E_{\text{exacto}} = E_{\text{teor}}$) y los valores del error relativo definido en (4.93), frente al número de grados de libertad del modelo.

En la figura 4.9 se muestran los contornos de isoerror obtenidos aplicando el estimador definido en (4.84). Como es bien sabido, la máxima concentración de los errores se obtiene en la esquina, que es un punto singular. Este resultado está de acuerdo con el obtenido por otros autores (Szabó y Babuška, 1991; Radovitzky y Ortiz, 1998; Zienkiewicz y Taylor, 1989).

De acuerdo con los resultados obtenidos, se extraen las siguientes conclusiones:

Conclusión 4.2 *Los valores del índice de efectividad θ y del error relativo η muestran que el comportamiento del estimador de error es asintóticamente exacto.*

Conclusión 4.3 *A la vista de las figura (4.8), se tiene una tasa de convergencia aproximadamente igual a $1/2$ que el estimador de error predice correctamente.*

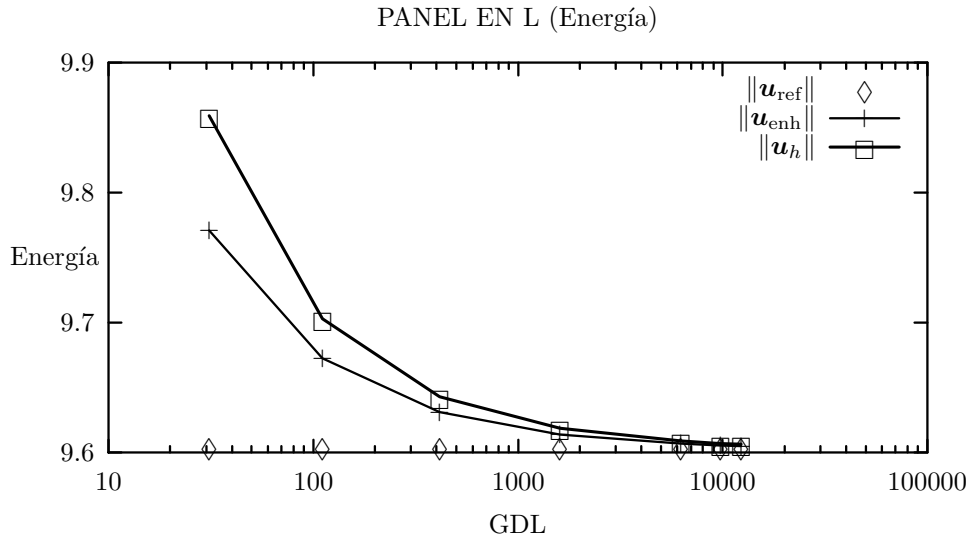


Figura 4.7: *Panel en L. Elasticidad infinitesimal. Energía de deformación*

GDL	θ	η
31	0,58876	0,09414
111	0,55997	0,05619
415	0,55527	0,03479
1599	0,58057	0,02198
6271	0,71540	0,01422
9759	0,85866	0,01239
12329	0,99290	0,01155

Cuadro 4.3: *Panel en L. Elasticidad infinitesimal. Índice de efectividad y error relativo*

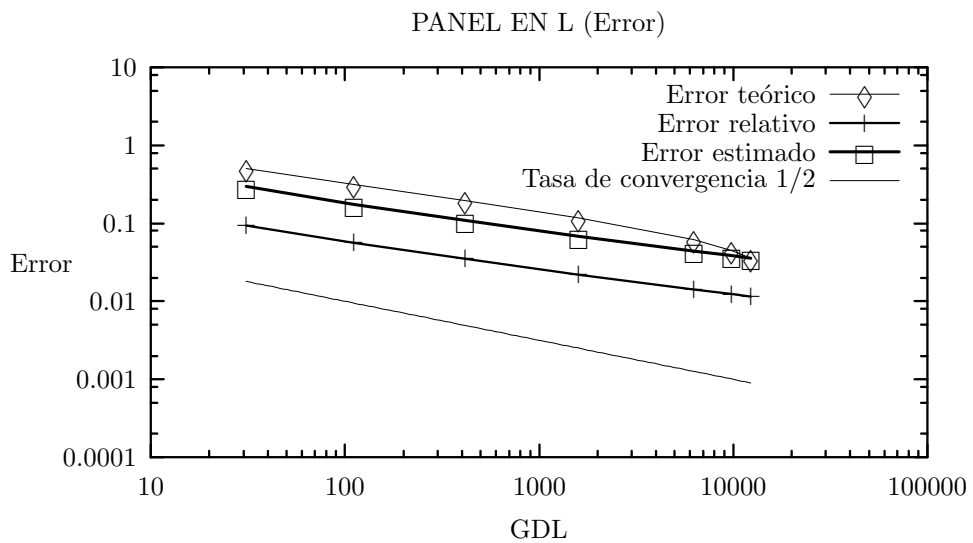


Figura 4.8: *Panel en L. Elasticidad infinitesimal. Error global*

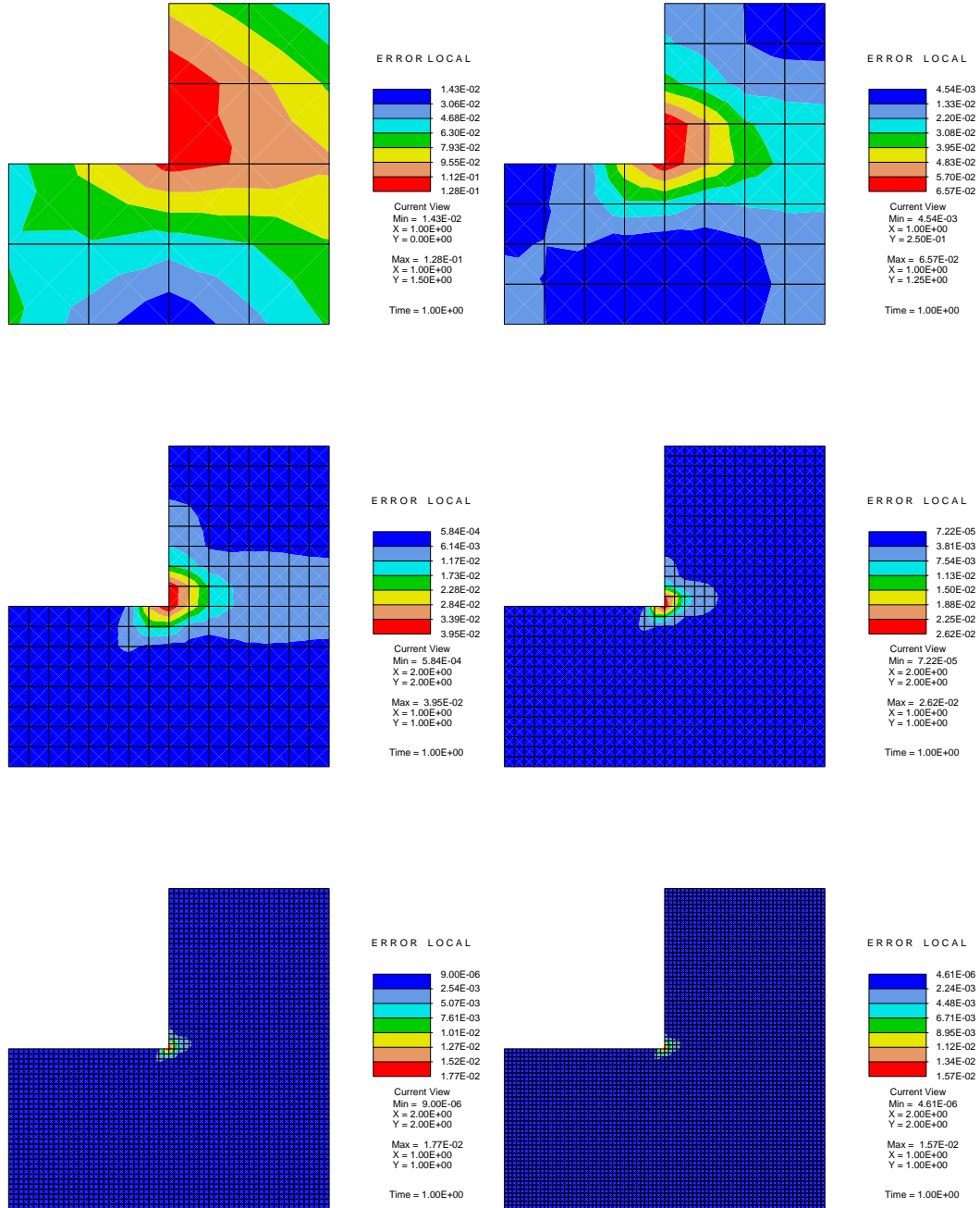


Figura 4.9: Panel en L. Elasticidad Infinitesimal. Contornos de error local. Mallas de 12, 48, 192, 768, 3072 y 4800 elementos

Ensayo de tracción en una probeta con doble entalla

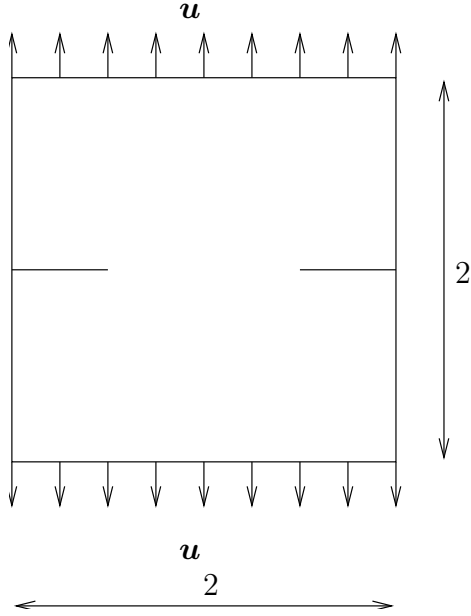


Figura 4.10: *Probeta con doble entalla. Elasticidad Infinitesimal*

En este ejemplo se representa el ensayo de tracción, en deformación plana, de una probeta con doble entalla en el modo I de fisuración. Este ejemplo se ha empleado para la estimación de error en (Radovitzky y Ortiz, 1998). Las dimensiones y condiciones de contorno se representan en la figura 4.10. Con la simetría existente, se ha modelizado la cuarta parte de la probeta. El desplazamiento impuesto es $u = 0,2$. Las características mecánicas son las mismas que en el ejemplo anterior. El problema se ha resuelto con mallas de 16, 64, 256, 1024, 4096 y 6400 elementos, con refinamiento uniforme. Para tener un valor de referencia de la energía interna, se ha adoptado como valor exacto el correspondiente a la malla de 6400 elementos (12919 g.d.l.) resuelta con elementos mejorados

Las figuras 4.11 y 4.12 muestran los resultados obtenidos para la energía y el error de discretización, respectivamente. La figura 4.11 muestra los valores de la energía de deformación, frente al número de grados de libertad, que se obtienen con los elementos formulados en desplazamientos, con la formulación de deformaciones supuestas y el valor considerado de referencia: $\|\mathbf{u}_h\|_E$, $\|\mathbf{u}_{\text{enh}}\|_E$ y $\|\mathbf{u}_{\text{ref}}\|_E$, respectivamente.

La figura 4.12 muestra el valor del error estimado vía (4.85), el error teórico evaluado mediante (4.92) y el error relativo (4.93). Los valores del índice de efectividad θ , definido en (4.94), y del error relativo η (4.93), se recogen en el cuadro 4.4, siendo N el número de grados de libertad.

En la figura 4.13 se muestran los contornos de error local, calculados según (4.84) para las mallas de 16, 64, 256 y 1024 elementos. En la figura 4.14 se pueden ver los mismos contornos en un detalle del fondo de la entalla, para las mallas de 4096 y 6400 elementos. Lógicamente, el error local estimado se concentra en el fondo de la entalla.

Conclusión 4.4 *Al igual que en el ejemplo del panel en L , en este ejemplo el estimador de error es asintóticamente exacto, según se desprende del valor de θ en el cuadro (4.4). Además (ver figura 4.12), la evolución del error estimado se ajusta correctamente a la evolución del error teórico calculado según (4.92).*

GDL	θ	η
10	0,57532	0,20811
37	0,46197	0,12758
139	0,44735	0,08755
535	0,46757	0,06241
2095	0,52094	0,04433
8287	0,72767	0,03142
12919	0,99907	0,02812

Cuadro 4.4: *Probeta con doble entalla. Elasticidad infinitesimal. Índice de efectividad y error relativo*

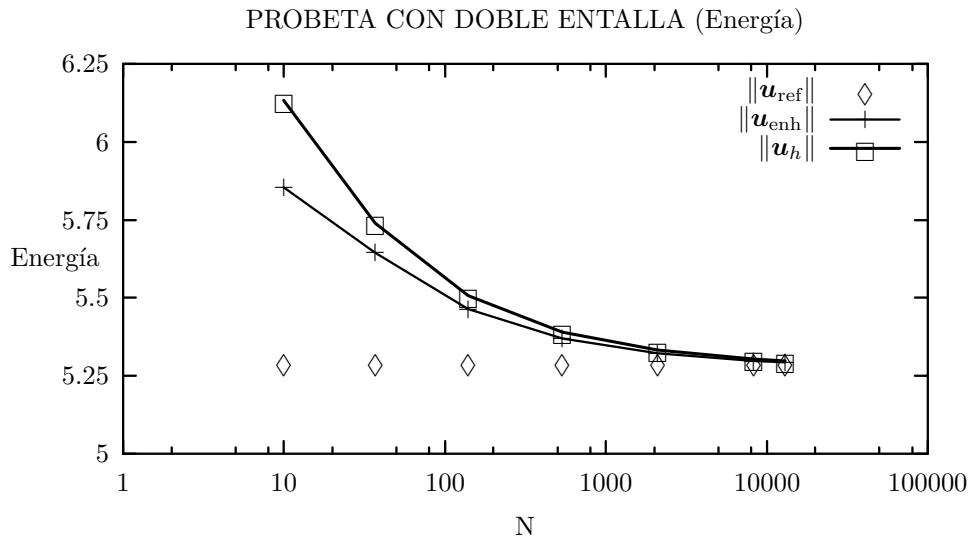


Figura 4.11: *Probeta con doble entalla. Elasticidad infinitesimal. Energía de deformación*

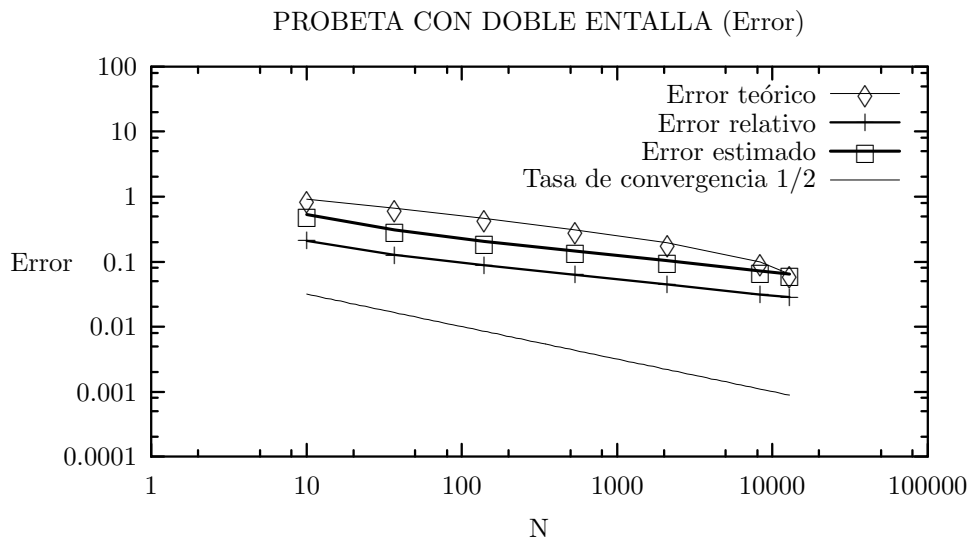


Figura 4.12: *Probeta con doble entalla. Elasticidad infinitesimal. Error global*

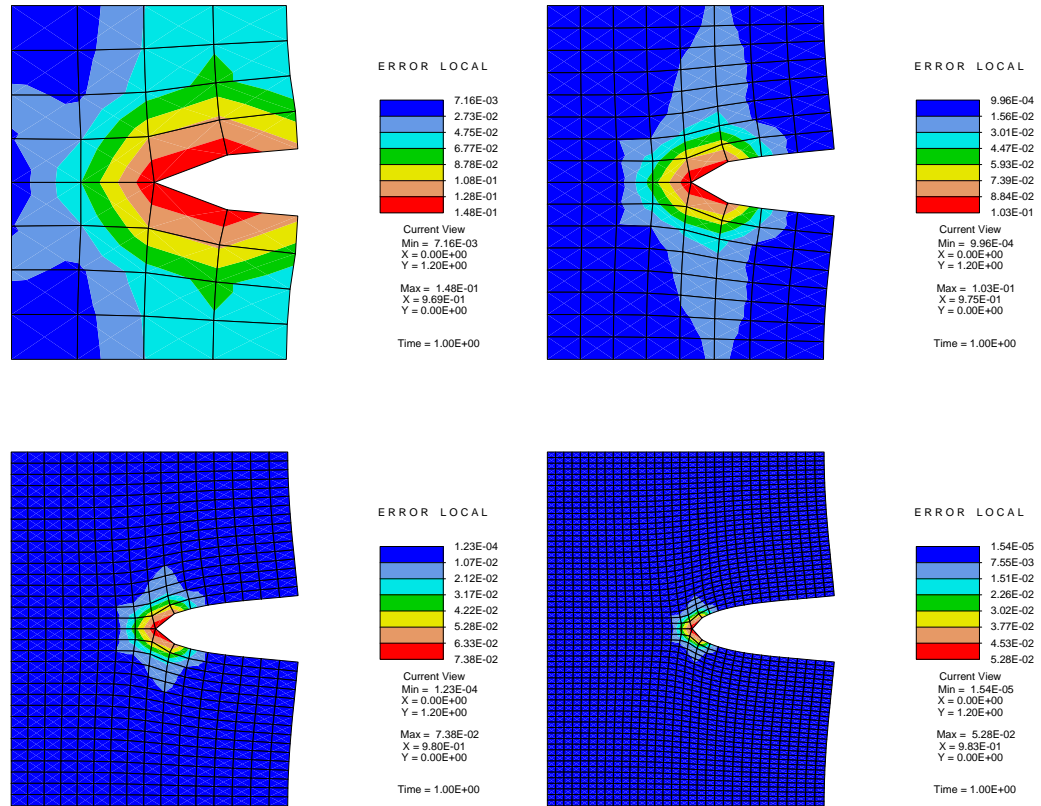


Figura 4.13: *Probeta con doble entalla. Elasticidad Infinitesimal. Contornos de error local. Mallas de 16, 64, 256 y 1024 elementos*

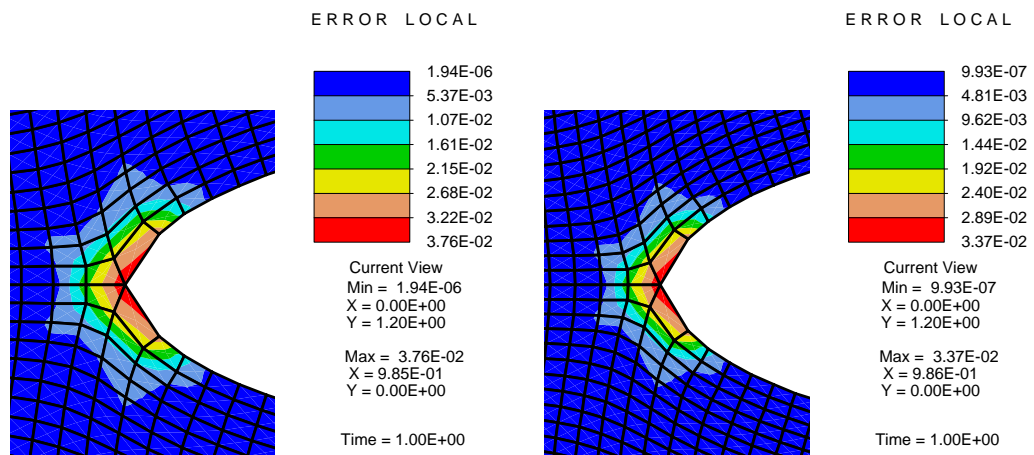


Figura 4.14: *Probeta con doble entalla. Contornos de error local. Detalle del fondo de entalla. Mallas de 4096 y 6400 elementos*

La membrana de Cook

En este problema, en el que el estado de deformación predominante es de flexión, en los elementos con formulación en desplazamientos aparece un bloqueo por cortante, que hace necesario trabajar con mallas finas para obtener una respuesta realista (Simó y Rifai, 1990).

El problema se define en la figura 4.15. Es una ménsula de canto variable, en deformación plana, con un esfuerzo cortante F impuesto en el extremo libre. Las características mecánicas son $E = 70,0$ y $\nu = 1/3$. La fuerza aplicada es $F = 10$.

El problema se ha resuelto con mallas de 4, 16, 64, 256, 1024, 4096 y 6400 elementos, con refinamiento uniforme. Se adopta como energía de deformación exacta la calculada con la malla de 6400 elementos (12960 g.d.l.), utilizando elementos mejorados.

En la figura 4.16 se muestran los valores de la energía de deformación frente al número de grados de libertad: los valores calculados con elementos estándar $\|\mathbf{u}_h\|_E$, con elementos mejorados $\|\mathbf{u}_{\text{enh}}\|_E$ y el valor de referencia adoptado como exacto $\|\mathbf{u}_{\text{ref}}\|_E$.

En la figura 4.17 se muestran el error estimado E mediante la expresión (4.85), el error teórico calculado con las energías $\|\mathbf{u}_{\text{ref}}\|_E$ y $\|\mathbf{u}_h\|_E$, según la expresión (4.92), y el error relativo (4.93).

El cuadro 4.5 recoge los valores del índice de efectividad (4.94) y del error relativo (4.93), frente al número de grados de libertad.

En la figura 4.18 se muestran los contornos de isoerror obtenidos aplicando el estimador definido en (4.84).

Conclusión 4.5 En este problema, que es muy adecuado para resolverlo con elementos mejorados, el error estimado se ajusta de manera muy exacta al error teórico. Prueba de ello son los valores del índice de efectividad de el cuadro 4.5: incluso con la malla de 4 elementos toma valores muy próximos a 1.

Conclusión 4.6 La tasa de convergencia obtenida es prácticamente igual a $1/2$.

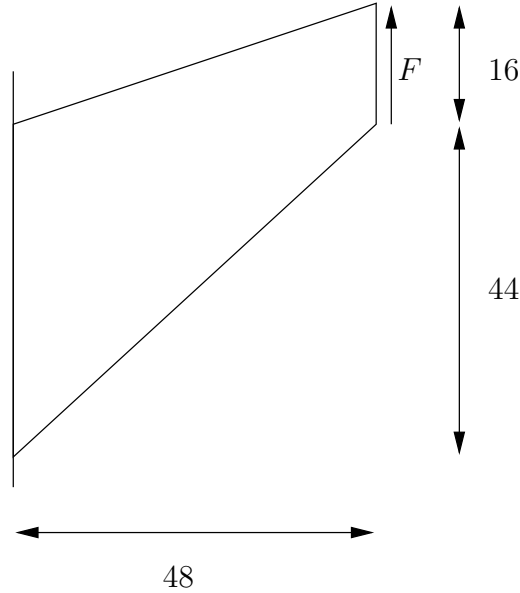


Figura 4.15: *Membrana de Cook. Elasticidad Infinitesimal*

GDL	θ	η
12	1,0524	0,6162
40	1,0709	0,4598
144	1,0949	0,2816
544	1,1103	0,1578
2112	1,1038	0,0861
8320	1,0403	0,0473
12960	0,9944	0,0392

Cuadro 4.5: *Membrana de Cook. Elasticidad infinitesimal. Índice de efectividad y error relativo*

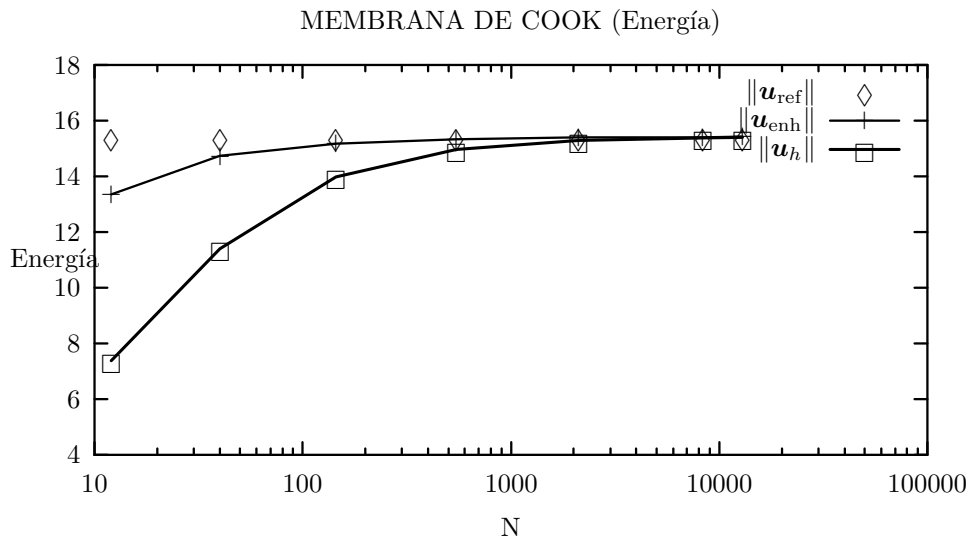


Figura 4.16: *Membrana de Cook. Elasticidad infinitesimal. Energía de deformación*

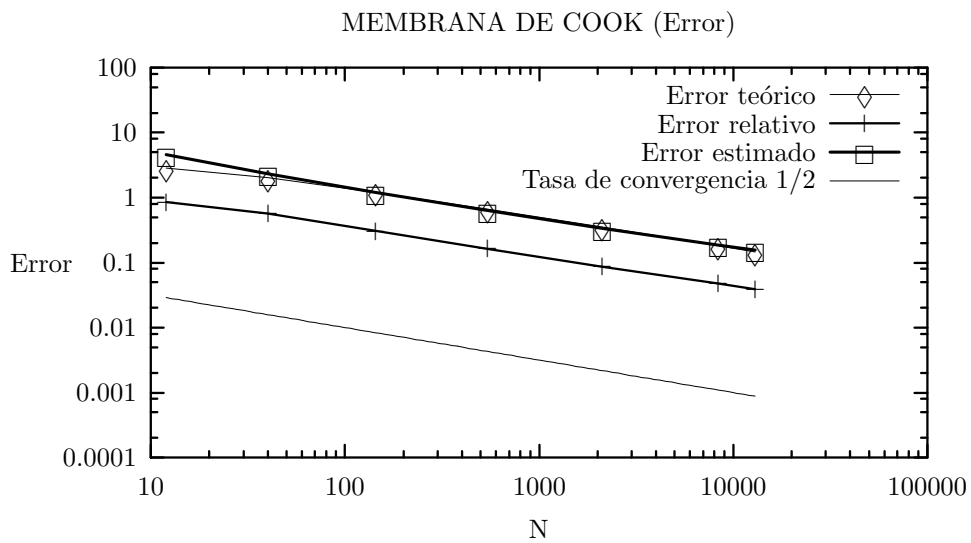


Figura 4.17: *Membrana de Cook. Elasticidad infinitesimal. Error global*

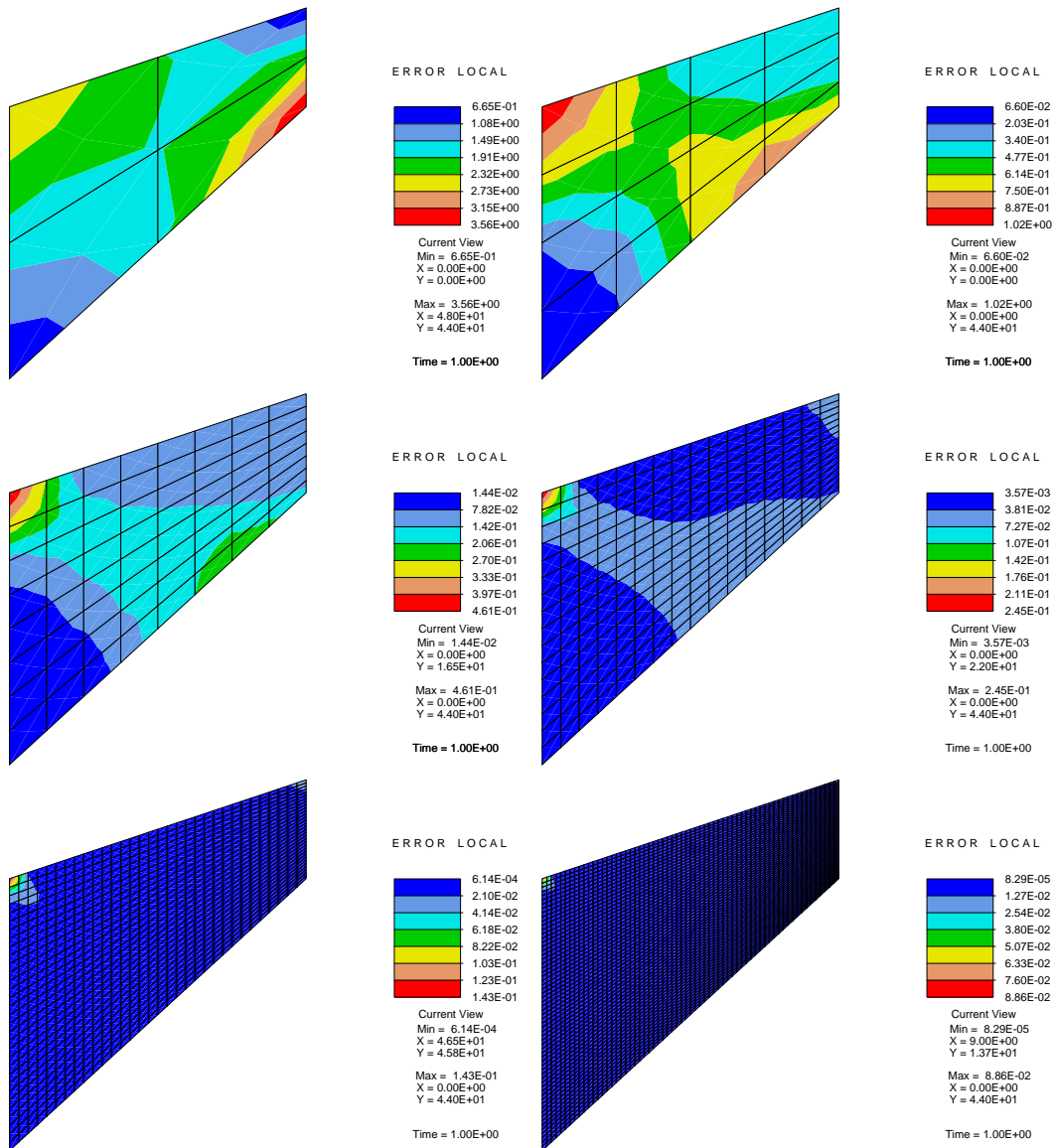


Figura 4.18: *Membrana de Cook. Elasticidad Infinitesimal. Contornos de error local. Mallas de 4, 16, 64, 256, 1024 y 4096 elementos*

4.4. Elasticidad con grandes deformaciones

4.4.1. Problema de contorno

Partiendo de las definiciones del apartado 2.4.1, se denomina $\partial_\varphi\Omega_0$ a la frontera de Ω_0 con movimientos impuestos definidos por $\bar{\varphi}$ y $\partial_T\Omega_0$ a la frontera de Ω_0 con tensiones impuestas $\bar{\mathbf{T}}$, tal que $\partial_\varphi\Omega_0 \cup \partial_T\Omega_0 = \partial\Omega_0$ y $\partial_\varphi\Omega_0 \cap \partial_T\Omega_0 = \emptyset$. Denominaremos $\bar{\Omega}_0 = \Omega_0 \cup \partial_0\Omega$ al cierre de Ω_0 y N_I a las componentes del vector \mathbf{N} normal a $\partial\Omega_0$. Sean \mathbf{B} las fuerzas volumétricas, \mathbf{F} el tensor gradiente de deformaciones, \mathbf{P} el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff (ver apéndice B) y $W(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ la función de densidad de energía elástica (ver apartado 3.3).

El problema de contorno de la elasticidad con grandes deformaciones queda planteado en los siguientes términos:

Dados $\mathbf{B} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\varphi} : \partial_\varphi\Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{T}} : \partial_T\Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, encontrar $\varphi : \bar{\Omega}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que cumpla las ecuaciones:

$$\text{Ecuaciones de Equilibrio: } \mathbf{DIV} \mathbf{P} + \mathbf{B} = 0 \text{ en } \Omega_0 \quad (4.95)$$

$$\text{con } \mathbf{P}\mathbf{N} = \bar{\mathbf{T}} \text{ en } \partial_T\Omega_0 \quad (4.96)$$

$$\text{Ecuaciones de Compatibilidad: } \mathbf{F} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} \text{ en } \Omega_0 \quad (4.97)$$

$$\varphi = \bar{\varphi} \text{ en } \partial_\varphi\Omega_0 \quad (4.98)$$

$$\text{Ecuaciones Constitutivas: } \mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (4.99)$$

donde $\bar{\varphi}$ y $\bar{\mathbf{T}}$, son variables prescritas.

4.4.2. Estructura variacional del problema de contorno

A continuación se analiza la estructura variacional del problema de contorno definido en el apartado anterior, con objeto de acotar el error de discretización cuando el problema se soluciona mediante elementos finitos. El teorema de Veinberg (apéndice C) aplicado al problema de contorno expresado en el apartado 4.4.1, al igual que en el caso lineal, permite obtener las condiciones necesarias para que dicho problema tenga estructura variacional y, en su caso, obtener el funcional asociado a dicho problema.

Para ello, las ecuaciones (4.95; 4.96; 4.97; 4.98; 4.99) se expresan mediante el operador diferencial \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}(\varphi) = \mathbf{0} \quad (4.100)$$

siendo:

$$\mathbf{A}(\varphi) = \begin{cases} \mathbf{DIV} \mathbf{P}(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{X}} \varphi) + \mathbf{B} & \text{en } \Omega_0 \\ \mathbf{P}(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{X}} \varphi) \mathbf{N} - \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{u}) & \text{en } \partial_T\Omega_0 \end{cases} \quad (4.101)$$

Considerando variaciones $\delta\varphi : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ admisibles ($\delta\varphi|_{\partial_\varphi\Omega_0} = \mathbf{0}$), la forma

débil $G(\varphi)[\delta\varphi]$ de $\mathbf{A}(\varphi)$ es:

$$G(\varphi)[\delta\varphi] = \int_{\Omega_0} (\mathbf{DIV} \mathbf{P} + \mathbf{B}) \cdot \delta\varphi d\Omega + \int_{\partial_T \Omega_0} (\mathbf{P}\mathbf{N} - \bar{\mathbf{T}}(\varphi)) \cdot \delta\varphi d\Gamma \quad (4.102)$$

aplicando el teorema de la divergencia en (4.102) e integrando por partes:

$$G(\varphi)[\delta\varphi] = \int_{\Omega_0} (\mathbf{P} \cdot \delta \nabla_{\mathbf{X}} \varphi - \mathbf{B} \cdot \delta\varphi) d\Omega - \int_{\partial_T \Omega_0} \bar{\mathbf{T}}(\varphi) \cdot \delta\varphi d\Gamma \quad (4.103)$$

Calculando la primera variación de $G(\varphi)[\delta\varphi]$ en (4.103) se obtiene:

$$\delta G(\varphi)[\delta\varphi, \delta\phi] = \int_{\Omega_0} \delta \nabla_{\mathbf{X}} \phi \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}} \delta \nabla_{\mathbf{X}} \varphi d\Omega - \int_{\partial_T \Omega_0} \delta \phi \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{T}}}{\partial \varphi} \delta\varphi d\Gamma \quad (4.104)$$

Las condiciones necesarias para que el problema de contorno tenga estructura variacional se obtienen aplicando el teorema de reciprocidad:

$$\delta G(\mathbf{u})[\delta\varphi, \delta\phi] = \delta G(\mathbf{u})[\delta\phi, \delta\varphi] \quad \forall \delta\varphi, \delta\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ admisibles} \quad (4.105)$$

Sustituyendo en (4.105) las variaciones calculadas de acuerdo con (4.104), se obtiene en componentes:

$$\frac{\partial P_i^J}{\partial F_L^k} = \frac{\partial P_k^L}{\partial F_J^i} \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_i}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial \bar{T}_j}{\partial \varphi_i} \quad (4.107)$$

Las condiciones (4.106) y (4.107) se pueden expresar respectivamente como:

$$\mathbf{rot}_{\mathbf{F}} \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (4.108)$$

$$\mathbf{rot}_{\varphi} \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{0} \quad (4.109)$$

donde $\mathbf{rot}_{\mathbf{F}}$ y \mathbf{rot}_{φ} son los operadores diferenciales *rotacional* respecto de \mathbf{F} y respecto de φ , respectivamente. Las expresiones (4.108) y (4.109) suponen que \mathbf{P} y $\bar{\mathbf{T}}$ derivan de sendos potenciales. Por tanto, la condición necesaria para que el problema de contorno descrito en el apartado 4.4.1 tenga estructura variacional, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\exists W = W(\mathbf{X}, \mathbf{F}), \Phi = \Phi(\mathbf{X}, \varphi) \quad | \quad \mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad \bar{\mathbf{T}} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, \varphi)}{\partial \varphi} \quad (4.110)$$

El funcional asociado a dicho problema de contorno se obtiene aplicando también el teorema de Veinberg:

$$\begin{aligned} \Pi_p(\varphi) &= \int_0^1 G(t\varphi)[\varphi] dt \\ &= \int_0^1 \left[\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial W(\mathbf{X}, t\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \varphi - \mathbf{B} \cdot \varphi \right) d\Omega - \int_{\partial_T \Omega_0} \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \varphi d\Gamma \right] dt \\ &= \int_{\Omega_0} [W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) - \mathbf{B} \cdot \varphi] d\Omega - \int_{\partial_T \Omega_0} \Phi(\mathbf{X}, \varphi) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.111)$$

El funcional Π_p se denomina *energía potencial del sólido*. La ecuación variacional asociada a dicho funcional se obtiene igualando a cero la primera variación de Π_p :

$$\delta\Pi_p(\boldsymbol{\varphi})[\delta\boldsymbol{\varphi}] = 0 \quad \forall \delta\boldsymbol{\varphi} \text{ admisible} \quad (4.112)$$

resultando:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_p(\boldsymbol{\varphi})[\delta\boldsymbol{\varphi}] &= a(\boldsymbol{\varphi})[\boldsymbol{\varphi}, \delta\boldsymbol{\varphi}] - \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} d\Omega - \int_{\partial_T\Omega_0} \overline{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} d\Gamma \\ &= 0 \quad \forall \delta\boldsymbol{\varphi} \in V \end{aligned} \quad (4.113)$$

Observación 4.4.1 La expresión del operador $a(\boldsymbol{\varphi})[\boldsymbol{\varphi}, \delta\boldsymbol{\varphi}]$ es:

$$a(\boldsymbol{\varphi})[\boldsymbol{\varphi}, \delta\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Omega_0} \frac{\partial W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \cdot \delta \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\varphi} d\Omega \quad (4.114)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen a partir de (4.113), y son precisamente (4.95; 4.96). La segunda variación permite obtener la forma de Dirichlet del funcional Π_p :

$$a(\boldsymbol{\varphi})[\delta\boldsymbol{\varphi}, \delta\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\Omega_0} \delta \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{\partial^2 W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} \delta \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\varphi} d\Omega \quad (4.115)$$

El tensor:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{X}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}} \quad (4.116)$$

se denomina tensor constitutivo de módulos tangentes. A la forma de Dirichlet expresada en (4.115), se le exige que cumpla la hipótesis de regularidad, debiendo verificar:

$$1. A_{ik}^{JL} < \infty, \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \quad (4.117)$$

$$2. a(\boldsymbol{\varphi})[\delta\boldsymbol{\varphi}, \delta\boldsymbol{\varphi}] \text{ es estable.} \quad (4.118)$$

Como ya se estableció en el apartado 4.3.2 para el caso de la elasticidad infinitesimal, la regularidad de la forma de Dirichlet implica que el funcional Π_p es convexo y que tiene un mínimo que es único:

$$\Pi_p(\boldsymbol{\varphi}) = \inf_{\boldsymbol{\psi} \in V} \Pi_p(\boldsymbol{\psi}) \quad (4.119)$$

Observación 4.4.2 La relación entre el tensor \mathbf{A} asociado al primer tensor de Piola-Kirchhoff y el tensor \mathbf{C} asociado al segundo tensor de Piola-Kirchhoff en componentes de una base ortonormal, es:

$$A_{iJkL} = 2C_{IJKL}F_{iI}F_{kK} + 1_{ik}S_{JL} \quad (4.120)$$

Si bien \mathbf{C} es definido positivo, no es de esperar que \mathbf{A} lo sea necesariamente. Para que \mathbf{A} sea definido positivo, el potencial $W(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ debe además ser convexo.

La convexidad de $W(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ implica la unicidad del problema y, por tanto, excluye las posibilidades de pandeo y fisuración (Hill, 1957). Asimismo es incompatible con el requisito de que la energía del material tienda a infinito a medida que su volumen tiende a cero (Marsden y Hughes, 1983).

Para superar estos inconvenientes, se plantea la desigualdad de elipticidad fuerte:

$$\mathbf{A}_{iJkL} u_i u_k U_J U_L \geq \epsilon |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{U}|^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{U} \in \mathbb{R}^n, \quad \epsilon \in \mathbb{R}^+ \quad (4.121)$$

Esta desigualdad es más débil que la de convexidad, y más restrictiva que otras desigualdades constitutivas como la de Baker-Ericksen (Baker y Ericksen, 1954). Por otra parte, Antman ha demostrado que la propiedad de elipticidad fuerte es compatible con las inestabilidades correspondientes a la estricción que se desarrolla en el ensayo de tracción simple (Antman, 1973).

4.4.3. Metodología de aproximación

Si la metodología empleada para resolver (4.119) es el método de los elementos finitos, la función φ se aproxima por la función φ_h :

$$\varphi_h = \sum_{i=1}^{n_{\text{nod}}} \mathbf{x}_i N_i(\mathbf{X}) \quad (4.122)$$

definida en un subespacio de dimensión finita $V_h \subset V$ | $\dim(V_h) < \infty$ y que cumple que $V_h \rightarrow V$ cuando $h \rightarrow 0$. El problema discreto equivale encontrar la función $\varphi_h \in V_h$ que verifica:

$$\Pi_p(\varphi_h) = \inf_{\psi_h \in V_h} \Pi_p(\psi_h) \quad (4.123)$$

$$\varphi_h = \bar{\varphi} \text{ en } \partial_u \Omega \quad (4.124)$$

siendo:

$$\Pi_p(\varphi_h) = \int_{\Omega} [W(\mathbf{X}, \mathbf{F}_h) - \mathbf{B} \cdot \varphi_h] d\Omega + \int_{\partial_t \Omega} \Phi(\mathbf{X}, \varphi_h) d\Gamma \quad (4.125)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al problema discreto expresado en (4.123) se obtienen anulando la primera variación de $\Pi_p(\varphi_h)$. Sustituyendo (4.122) en (4.125) y haciendo:

$$\delta \Pi_p(\varphi_h)[\delta \varphi_h] = 0 \quad \forall \delta \varphi_h \text{ admisible} \quad (4.126)$$

se obtiene la ecuación variacional discretizada:

$$a(\varphi)[\varphi_h, \delta \varphi_h] - \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \delta \varphi_h d\Omega - \int_{\partial_T \Omega_0} \bar{\mathbf{T}}(\varphi_h) \cdot \delta \varphi_h d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \varphi_h \in V_h \quad (4.127)$$

Como $V_h \subset V$, en (4.113) se verifica:

$$a(\varphi)[\varphi, \delta\varphi_h] - \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \delta\varphi_h d\Omega - \int_{\partial_T \Omega_0} \bar{\mathbf{T}}(\varphi_h) \cdot \delta\varphi_h d\Gamma = 0 \quad (4.128)$$

Restando (4.128) y (4.127), resulta:

$$a(\varphi)[\varphi, \delta\varphi_h] - a(\varphi)[\varphi_h, \delta\varphi_h] = 0 \quad \forall \delta\varphi_h \in V_h \quad (4.129)$$

Observación 4.4.3 *En este caso no se puede obtener un resultado similar al expresado en (4.66) para pequeñas deformaciones, dado que $a(\varphi)[\varphi, \delta\varphi]$ es no lineal en φ . Sin embargo, en la hipótesis de que se esté en régimen asintótico ($h \rightarrow 0$), en el cual la solución numérica φ_h es aproximadamente igual a la solución exacta φ , la ecuación (4.129) se puede linealizar, obteniendo:*

$$a(\varphi)[\varphi - \varphi_h, \delta\varphi_h] = 0 \quad \forall \delta\varphi_h \in V_h, \quad h \rightarrow 0 \quad (4.130)$$

La ecuación (4.130) establece la condición de ortogonalidad entre $\varphi - \varphi_h$ y $\delta\varphi_h$, $\forall \delta\varphi_h$. Como se ha desarrollado en el apartado 4.3.3, esta condición establece la propiedad de aproximación óptima del método de elementos finitos:

$$\|\varphi - \varphi_h\|_E = \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\varphi - \mathbf{v}_h\|_E, \quad \forall \delta\varphi_h \quad (4.131)$$

que expresa que la solución φ_h obtenida al resolver (4.127) por el método de elementos finitos, minimiza la norma $\|\varphi - \varphi_h\|_E$.

La figura 4.2 es también válida para interpretar el resultado expresado en la ecuación (4.131), sin más que sustituir \mathbf{u} y \mathbf{u}_h por φ y φ_h , respectivamente.

Observación 4.4.4 *La propiedad de aproximación óptima del método de elementos finitos, en el caso general de la elasticidad no lineal, sólo se verifica en el régimen asintótico ($\varphi_h \rightarrow \varphi$)*

4.4.4. Estimación del error

La metodología seguida para la estimación local de error en el problema de la elasticidad no lineal con grandes deformaciones, es muy parecida a la descrita anteriormente para deformaciones infinitesimales. Sin más que sustituir \mathbf{u} por φ en los desarrollos del apartado 4.3.4, se llega a la expresión de la cota de error:

$$\forall \varphi_h^e \in H^1(\Omega^e, \mathbb{R}^n) \exists C \quad | \quad |\varphi^e - \varphi_h^e|_{1,2} \leq C \frac{(h^e)^2}{\rho^e} |\varphi^e|_{2,2} \quad (4.132)$$

Para la estimación global del error sucede lo mismo. Sustituyendo \mathbf{u} por φ en los desarrollos correspondientes a los problemas de deformaciones infinitesimales, la cota del error global que se obtiene es:

$$\|\varphi - \varphi_h\|_E \leq C \sum_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \frac{(h^e)^2}{\rho^e} |\varphi^e|_{2,2} \quad (4.133)$$

4.4.5. Estimación del error “a posteriori”

Las expresiones (4.132) ó (4.133) tienen el inconveniente práctico de acotar el error en función del campo φ^e que es la incógnita básica del problema y de la que sólo se conoce una solución aproximada φ_h^e . Esta solución, al igual que en el caso lineal, no puede sustituirse directamente por φ^e dado que $D^\alpha \varphi_h^e = 0$ para $|\alpha| = k + 1$.

Con objeto de estimar el error en la práctica, en el siguiente apartado se propone la sustitución de φ^e por la solución obtenida con los elementos mejorados (Simó y Armero, 1993): φ_{enh}^e

4.4.6. Estimador de error propuesto en este trabajo

En este trabajo se propone un estimador de error de la solución φ_h obtenida con elementos formulados en desplazamientos, que se basa en la solución φ_{enh} obtenida con elementos de deformaciones supuestas (Simó y Armero, 1993). Empleando la propiedad de la desigualdad triangular:

$$\|\varphi - \varphi_h\|_E \leq \|\varphi - \varphi_{\text{enh}}\|_E + \|\varphi_{\text{enh}} - \varphi_h\|_E \quad (4.134)$$

Estableciendo la misma hipótesis que en el problema lineal:

Hipótesis 4.4.1 *Si se supone que los órdenes de convergencia son:*

$$\|\varphi - \varphi_{\text{enh}}\|_E = o(h^m) \quad (4.135)$$

$$\|\varphi_{\text{enh}} - \varphi_h\|_E = o(h^p) \quad (4.136)$$

y que en el régimen asintótico se cumple:

$$m > p \quad (4.137)$$

Entonces, en el límite del régimen asintótico ($h \rightarrow 0$), en la parte derecha de la expresión (4.134) el primer sumando es mucho menor que el segundo, pudiéndose establecer que:

$$\|\varphi - \varphi_h\|_E \leq C \|\varphi_{\text{enh}} - \varphi_h\|_E \quad C \in \mathbb{R}^+ \quad (4.138)$$

Observación 4.4.5 *Las condiciones (4.135), (4.136) y (4.137) garantizan que las soluciones φ_{enh} y φ_h convergen a la solución exacta, de manera que:*

1. $\|\varphi_{\text{enh}} - \varphi_h\|_E$ decrece según se refina la malla
2. La solución obtenida con los elementos mejorados se aproxima a la solución exacta “mejor” que la solución con elementos en desplazamientos a la solución con elementos mejorados, al menos en régimen asintótico.

Observación 4.4.6 *En sentido estricto, el estimador de error propuesto en (4.138) únicamente es válido en régimen asintótico dado que esta es una hipótesis de partida para obtener la ecuación (4.130).*

Observación 4.4.7 *El estimador de error (4.138) aplicado a los estados de deformación que corresponden a la prueba de la parcela (estados de deformación constante), es nulo y por lo tanto exacto. Dicho estimador aplicado a los estados de flexión pura (para los que los elementos mejorados dan la solución exacta) también da valores exactos.*

El estimador local de error que se propone es:

$$E^e = \|\varphi_{\text{enh}}^e - \varphi_h^e\|_E \quad (4.139)$$

siendo:

$$\|\varphi\|_E^2 = a(\varphi)[\varphi, \varphi] = \int_{\Omega_0} \nabla_{\mathbf{X}} \varphi \cdot \mathbf{A} \nabla_{\mathbf{X}} \varphi d\Omega \quad (4.140)$$

Observación 4.4.8 *La norma energética (4.140) no coincide con la energía de deformación ya que el integrando no está expresado en forma de tasa.*

Teniendo en cuenta que para los elementos mejorados se postula la descomposición aditiva del gradiente de deformaciones, en una parte compatible $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ y una parte mejorada $\tilde{\mathbf{F}}$ (ver apartado 2.4):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \tilde{\mathbf{F}} \quad (4.141)$$

Sustituyendo (4.141) en (4.139), se obtiene la expresión del estimador de error que se ha implementado:

$$(E^e)^2 = \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{A} \tilde{\mathbf{F}} d\Omega \quad (4.142)$$

Observación 4.4.9 *Existen otras formas de cuantificar la contribución de los modos mejorados a la solución del problema, distintas de la expresada en (4.142). Por ejemplo:*

1. *Mediante la diferencia de los valores obtenidos a través de la función de densidad de energía:*

$$W_{\text{enh}} = W(\mathbf{X}, \mathbf{F}) - W(\mathbf{X}, \mathbf{F}(\mathbf{u})) \quad (4.143)$$

2. *Mediante el cálculo de la energía asociada a un gradiente de deformaciones ficticio, que transforma la configuración de referencia en una configuración “intermedia compatible” que se definiría de manera análoga a la configuración intermedia del problema elastoplástico:*

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \mathbf{F}_{\text{enh}} \quad (4.144)$$

Identificando (4.144) con (4.141), la expresión de este gradiente de deformaciones ficticio sería:

$$\mathbf{F}_{enh} = \mathbf{1} + \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{u})\tilde{\mathbf{F}} \quad (4.145)$$

Con la expresión de \mathbf{F}_{enh} obtenida en (4.145), se podría evaluar la energía de deformación correspondiente.

La expresión (4.143), aunque posee una interpretación clara, tiene el inconveniente de no ser variacionalmente consistente, al no poder expresarse en términos de una forma de Dirichlet.

La expresión (4.145) tiene el inconveniente de introducir una configuración que carece de sentido físico y que no está definida de forma global, sino punto por punto.

Por estos motivos parece razonable adoptar como cota de error la expresión (4.142), aunque este es un punto que queda abierto.

Definiendo el error global mediante la expresión (4.142) extendida a todo el dominio Ω , este se puede expresar como suma de los errores elementales:

$$E^2 = \sum_{e=1}^{n_{elm}} (E^e)^2 \quad (4.146)$$

Observación 4.4.10 La cota del error de discretización que se propone en (4.146) es una cota local que se evalúa elemento por elemento, sin calcular suavizados globales. Este hecho constituye una ventaja desde el punto de vista de la eficiencia computacional.

4.4.7. Ejemplos

Panel en forma de L

Este ejemplo corresponde a la generalización para grandes deformaciones del propuesto en el apartado 4.3.8 para el caso de la elasticidad infinitesimal. Los desplazamientos impuestos valen $u = 0,4$, lo que da lugar a una deformación media del 20 %, en la dirección en que se impone el desplazamiento. La definición del problema vuelve a ser la que se muestra en la figura 4.6. En este caso se utiliza como modelo constitutivo el de un material hiperelástico neo-hookeano, definido por la función de densidad de energía interna:

$$W(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\lambda(\log J)^2 - \mu \log(J) + \frac{1}{2}\mu(\text{traza}(\mathbf{C}) - 3) \quad (4.147)$$

siendo:

$$\begin{aligned} J &= \det(\mathbf{F}) \\ \mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \mathbf{F} \text{ (tensor derecho de Cauchy)} \\ \lambda, \mu &= \text{Coeficientes de Lamé} \end{aligned}$$

Los valores adoptados para los coeficientes de Lamé han sido:

$$\begin{aligned} \lambda &= 164,21, \\ \mu &= 80,194, \end{aligned}$$

que se corresponden con los ya utilizados en el ejemplo de elasticidad infinitesimal. Las mallas utilizadas son otra vez las de 12, 48, 192, 768, 3072, 4800 y 6075 elementos, siendo los resultados de esta última los que han servido para calcular la energía de referencia:

$$\|\varphi_{\text{ref}}\|_E = 9,7876 \quad (4.148)$$

En la figura 4.19 se muestra la evolución de la energía de deformación calculada con los elementos formulados en desplazamientos $\|\varphi_h\|_E$, la calculada con los elementos mejorados $\|\varphi_{\text{enh}}\|_E$ y la comparación con la energía de referencia $\|\varphi_{\text{ref}}\|_E$.

Tomando la energía de referencia como exacta, el error teórico sería:

$$E_{\text{teor}} = \sqrt{\|\varphi_{\text{ref}}\|_E - \|\varphi_h\|_E} \quad (4.149)$$

De manera análoga al caso de la elasticidad infinitesimal, se define el error relativo como:

$$\eta = \frac{E_{\text{exacto}}}{\|\varphi\|_E} \approx \frac{E}{\sqrt{\|\varphi_h\|_E^2 + E^2}} \quad (4.150)$$

siendo E_{exacto} el error exacto y E el error estimado.

Observación 4.4.11 *Al igual que en el caso de la elasticidad infinitesimal, la expresión del error teórico (4.149) no es la única que se puede adoptar como valor de referencia. También se podría haber definido el error teórico como:*

$$E_{teor} = \|\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h\|_E$$

No obstante, la expresión (4.149) es muy sencilla de evaluar desde el punto de vista computacional.

En la figura 4.20 se muestra la evolución del error estimado según (4.146) con el número de grados de libertad, la evolución del error teórico (4.149), del error relativo (4.150), y la recta que corresponde a una tasa de convergencia igual a $1/2$

En el cuadro 4.6 se recogen los valores del índice de efectividad definido en (4.94) y del error relativo (4.150). Con objeto de conocer la influencia del orden de la cuadratura de Gauss, se ha evaluado para los resultados obtenidos con 4 y 5 puntos de Gauss. Las diferencias entre un orden de cuadratura y otro apenas son apreciables.

En la figura 4.21 se recogen los contornos de isoerror local estimado, para las mallas deformadas (sin factor de magnificación) de 12, 48, 192, 768, 3072 y 4800 elementos

Estos resultados permiten extraer las siguientes conclusiones:

Conclusión 4.7 *El estimador de error (4.146) es convergente: su valor decrece según se aumenta el número de grados de libertad de la malla. Asimismo, dicho estimador predice una tasa de convergencia aproximadamente igual a $1/2$, que es un valor razonable.*

Conclusión 4.8 *La distribución de errores locales que se muestra en la figura 4.21 indica que el error se concentra en la esquina del panel. Este resultado es razonable, dado que la esquina es un punto singular de concentración de tensiones.*

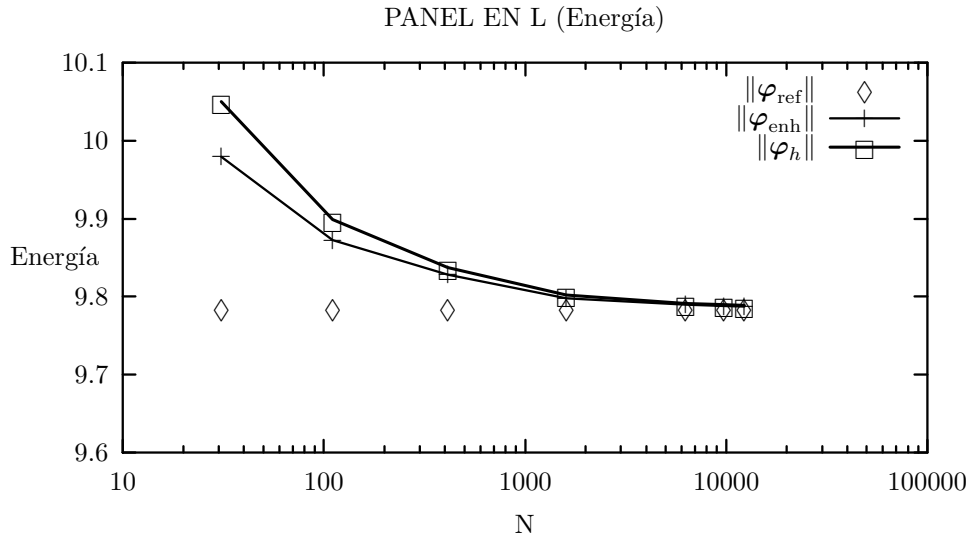


Figura 4.19: *Panel en L. Elasticidad finita. Energía de deformación*

<i>GDL</i>	θ (4 P.G)	θ (5 P.G)	η (4 P.G)	η (5 P.G)
12	0,68597	0,68542	0,110158	0,110067
40	0,64010	0,63955	0,067613	0,067555
144	0,72984	0,72874	0,051609	0,051532
544	0,71604	0,71528	0,027425	0,027396
2112	0,85576	0,85457	0,016789	0,016766
8320	1,02678	1,02520	0,014263	0,014242
12960	1,23900	1,23723	0,013072	0,013053

Cuadro 4.6: *Panel en L. Elasticidad finita. Índice de efectividad θ , y error relativo η*

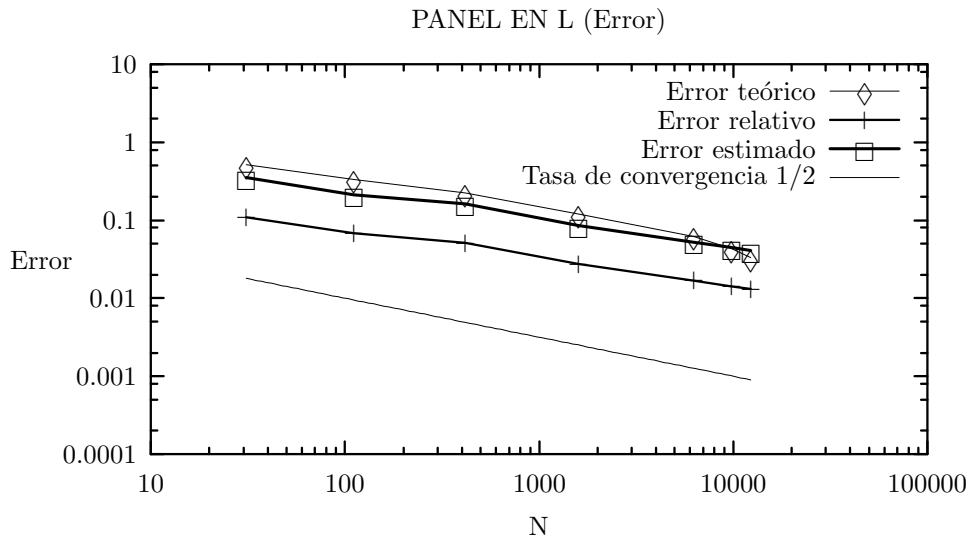


Figura 4.20: *Panel en L. Elasticidad finita. Error Global*

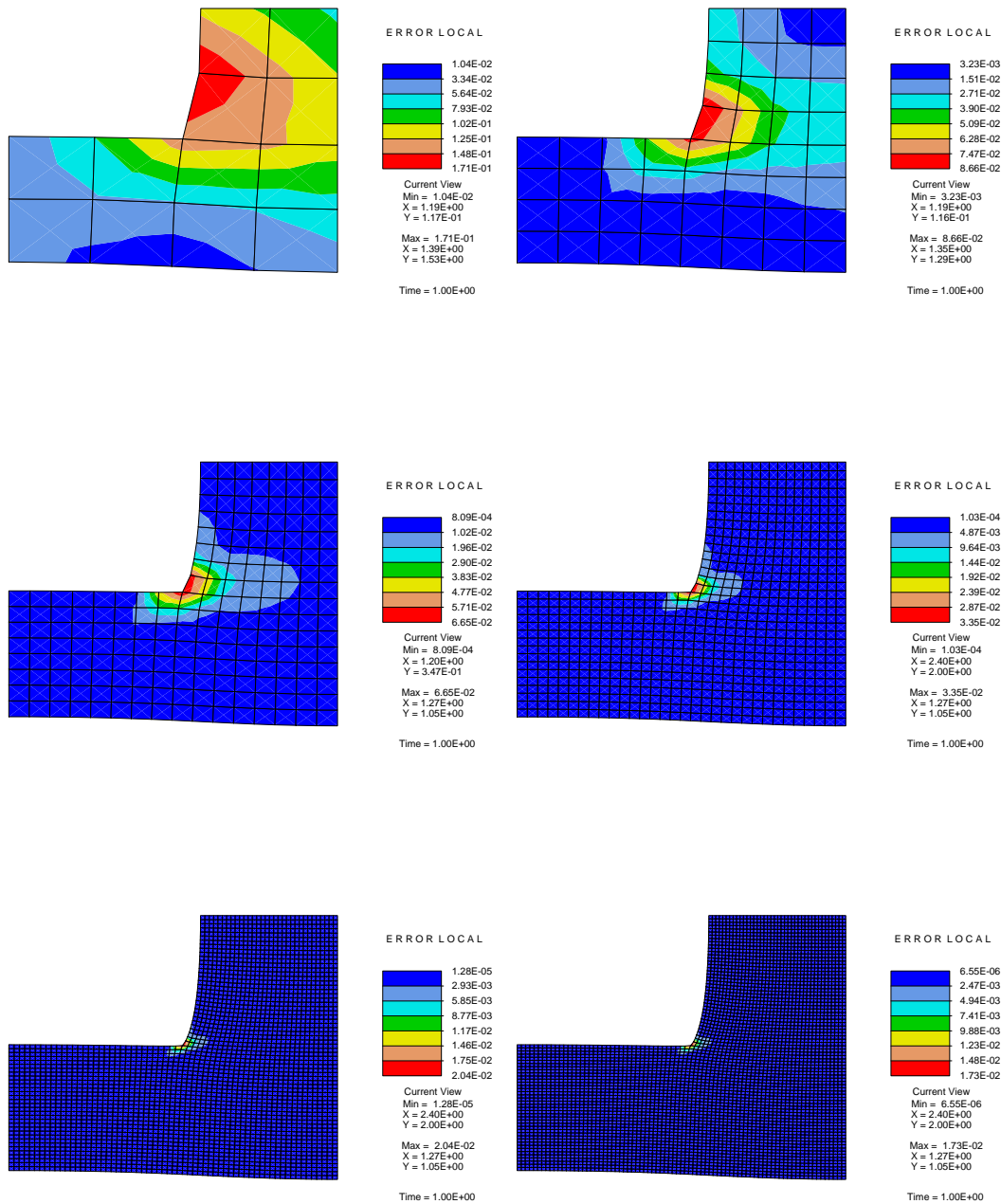


Figura 4.21: Panel en L . Elasticidad finita. Contornos de error local. Mallas de 12, 48, 192, 768, 3072 y 4800 elementos

Ensayo de tracción en una probeta con doble entalla

En este ejemplo se vuelve a analizar la probeta con doble entalla estudiada en el apartado 4.3.8, pero en este caso se hace en el contexto de la elasticidad con deformaciones finitas. El desplazamiento impuesto es $u = 0,2$, lo que supone un 20 % del tamaño de la probeta. La definición del problema se resume en la figura 4.10. Las mallas utilizadas también son las mismas que las del caso de elasticidad infinitesimal: 16, 64, 256, 1024, 4096 y 6400 elementos, considerando por razones de simetría 1/4 de la probeta.

El modelo constitutivo utilizado es el mismo que en el ejemplo anterior: un material neo-hookeano con la función de densidad de energía interna expresada en (4.147), siendo el valor de los coeficientes de Lamé los definidos en dicho ejemplo.

A efectos de la estimación de error se adopta como energía interna de referencia la calculada con la malla de 6400 elementos (12919 G.D.L.), que vale:

$$\|\varphi_{\text{ref}}\|_E = 5,52263 \quad (4.151)$$

Siguiendo la metodología empleada en los ejemplos anteriores, las figuras (4.22) y (4.23) muestran, respectivamente, la evolución de la energía de deformación y del estimador de error frente al número de grados de libertad del problema. Para esta última, el error teórico se calcula según la expresión (4.149).

En el cuadro 4.7 se muestran los valores del índice de efectividad θ (4.94) y del error relativo η , que se obtienen empleando 4 y 5 puntos de Gauss. Los resultados obtenidos con una y otra cuadratura son prácticamente los mismos.

Por último, la figura (4.24) muestra los isocontornos correspondientes al error local estimado, en las mallas de 16, 64, 256, 1024, 4096 y 6400 elementos. A efectos de postproceso se dibuja la mitad de la probeta, en lugar de la cuarta parte que se ha modelizado. En las dos mallas más finas, por motivos de claridad, únicamente se muestra un detalle del fondo de la entalla. Todas las deformadas están sin magnificar.

Conclusión 4.9 *De acuerdo con la figura (4.23), en este ejemplo el estimador de error también es convergente: su valor decrece según aumenta el número de grados de libertad de la malla. Asimismo, el error estimado se ajusta correctamente al error teórico evaluado mediante (4.149).*

Conclusión 4.10 *Los contornos de isoerror local de la figura (4.24) muestran que el error de discretización se concentra en la zona del fondo de la entalla. Este resultado es coherente dado que el fondo de la entalla es un punto singular debido a que las tensiones en el mismo tiende a infinito.*

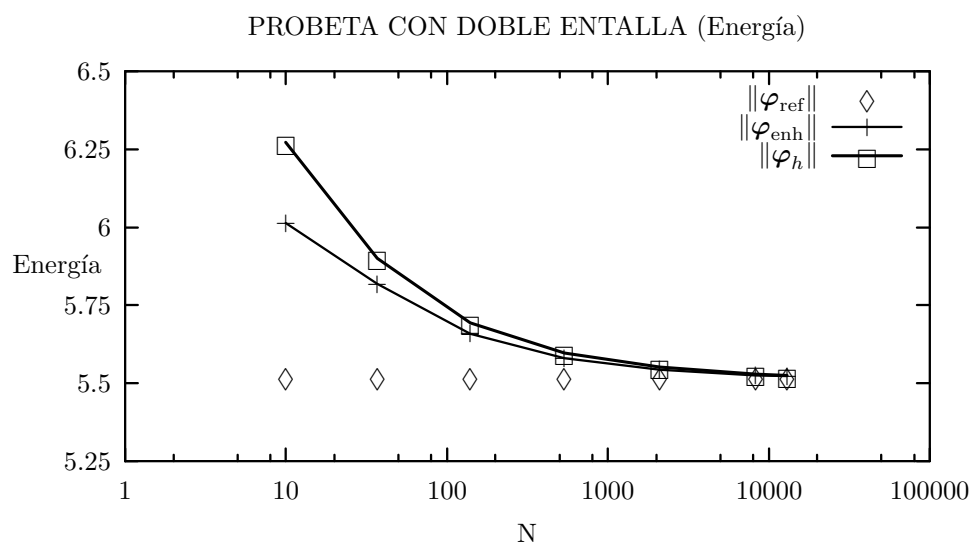


Figura 4.22: Probeta con doble entalla. Elasticidad finita. Energía de deformación

GDL	θ (4 P.G)	θ (5 P.G)	η (4 P.G)	η (5 P.G)
10	0,78215	0,78020	0,26089	0,26028
37	0,63247	0,63201	0,15800	0,15788
139	0,59797	0,59739	0,10308	0,10298
535	0,59751	0,59653	0,06858	0,06846
2095	0,60332	0,60220	0,04349	0,04339
8287	0,72150	0,72132	0,02647	0,02641
12919	0,92054	0,92266	0,02249	0,02244

Cuadro 4.7: Probeta con doble entalla. Elasticidad finita. Índice de efectividad θ y error relativo η

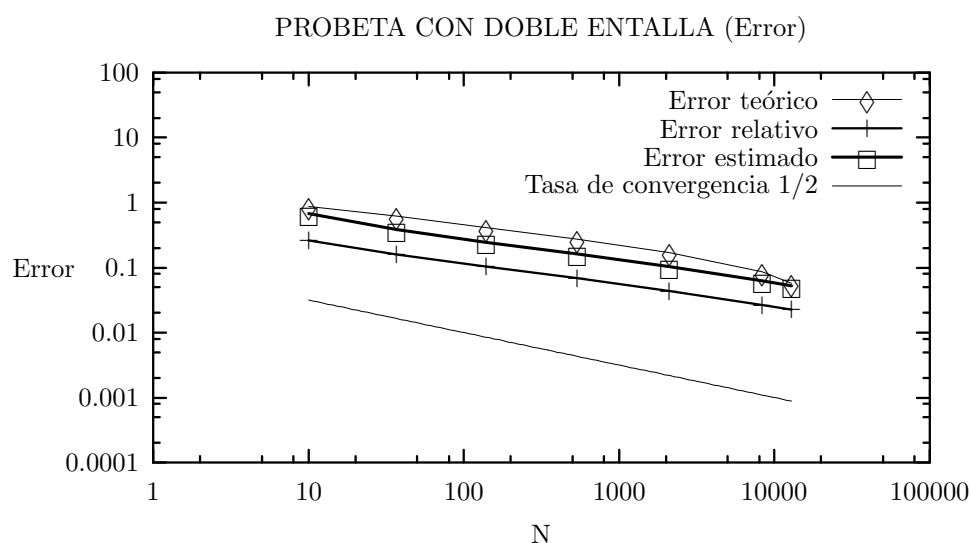


Figura 4.23: Probeta con doble entalla. Elasticidad finita. Error Global

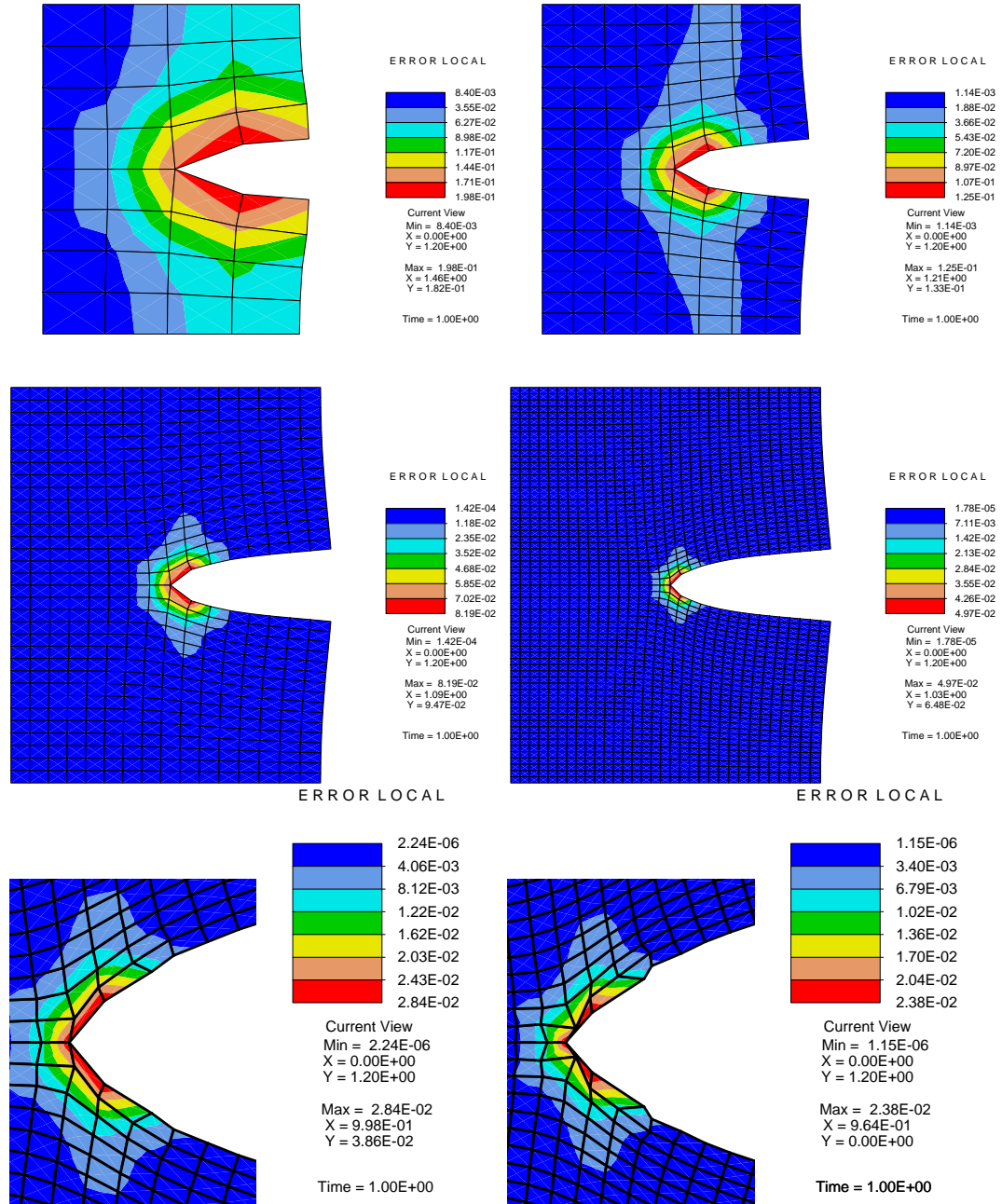


Figura 4.24: *Probeta con doble entalla. Elasticidad finita. Contornos de error local. Mallas de 16, 64, 256, 1024, 4096 y 6400 elementos*

La membrana de Cook

En este ejemplo se analiza la membrana de Cook en el contexto de la elasticidad con deformaciones finitas. Este mismo ejemplo fue estudiado en el apartado 4.3.8, para el caso de la elasticidad lineal. La definición de la geometría, condiciones de contorno y cargas aplicadas se encuentra en la figura 4.10. Las mallas consideradas son las mismas que en el problema de elasticidad infinitesimal: 4, 16, 64, 256, 1024, 4096 y 6400 elementos.

El modelo constitutivo utilizado es el del material neo-hookeano de los ejemplos anteriores. Los valores de los coeficientes de Lamé son:

$$\begin{aligned}\lambda &= 52,5, \\ \mu &= 26,250,\end{aligned}$$

para que los valores del módulo de Young y el coeficiente de Poisson sean los mismos que los adoptados en el caso de la elasticidad infinitesimal.

Para la estimación de error se toma como energía interna de referencia la calculada con la malla de 6400 elementos (12960 G.D.L.), que es:

$$\|\varphi_{\text{ref}}\|_E = 14,5095 \quad (4.152)$$

Al igual que en los ejemplos anteriores, las figuras (4.25) y (4.26) muestran, respectivamente, la evolución de la energía de deformación y del estimador de error frente al número de grados de libertad del problema. El error teórico se calcula según la expresión (4.149), y el error relativo mediante (4.150).

En el cuadro 4.8 se muestran los valores del índice de efectividad θ (4.94) y de error relativo η (4.150), que se obtienen empleando 4 y 5 puntos de Gauss. En este caso los resultados obtenidos tampoco están influenciados por el orden de la cuadratura de Gauss que se utilice.

Por último, la figura (4.27) muestra los isocontornos correspondientes al error local estimado, en las mallas de 4, 16, 64, 256, 1024 y 4096 elementos.

Conclusión 4.11 *En este ejemplo en el que el estado de deformación predominante es el de flexión, los valores del índice de efectividad θ , al igual que sucedía en el caso de la elasticidad infinitesimal, vuelven a tomar valores próximos a 1 incluso en las mallas gruesas.*

Conclusión 4.12 *El estimador de error es convergente, obteniéndose un valor de la tasa de convergencia prácticamente igual a 1/2.*

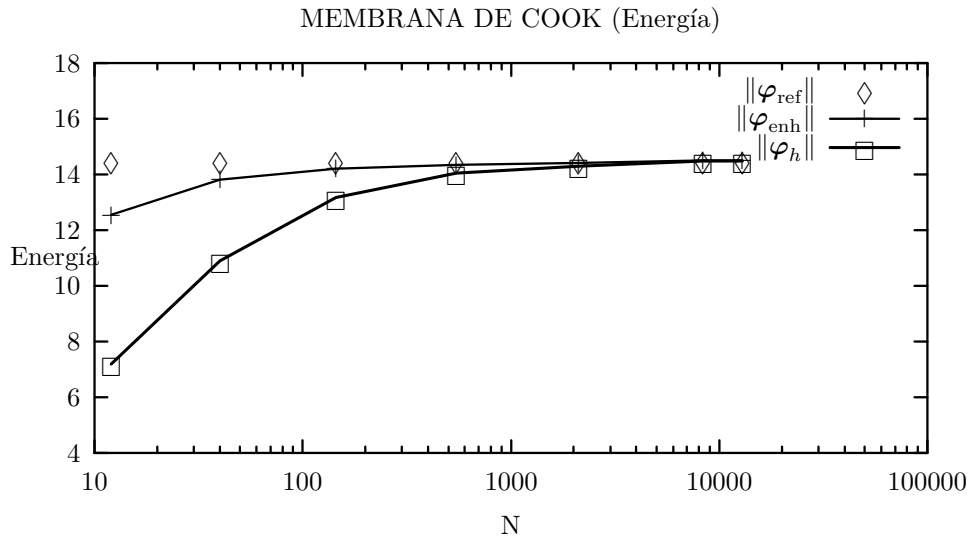


Figura 4.25: *Membrana de Cook. Elasticidad finita. Energía de deformación*

<i>GDL</i>	θ (4 P.G)	θ (5 P.G)	η (4 P.G)	η (5 P.G)
12	1,6537	1,6429	0,92142	0,92203
40	1,6914	1,6946	0,69810	0,69877
144	1,4350	1,4359	0,41628	0,41646
544	1,2873	1,2875	0,22959	0,22961
2112	1,0713	1,0714	0,12549	0,12547
8320	1,4845	1,4864	0,06984	0,06982
12960	1,5572	1,5605	0,05819	0,05817

Cuadro 4.8: *Membrana de Cook. Elasticidad finita. Índice de efectividad*

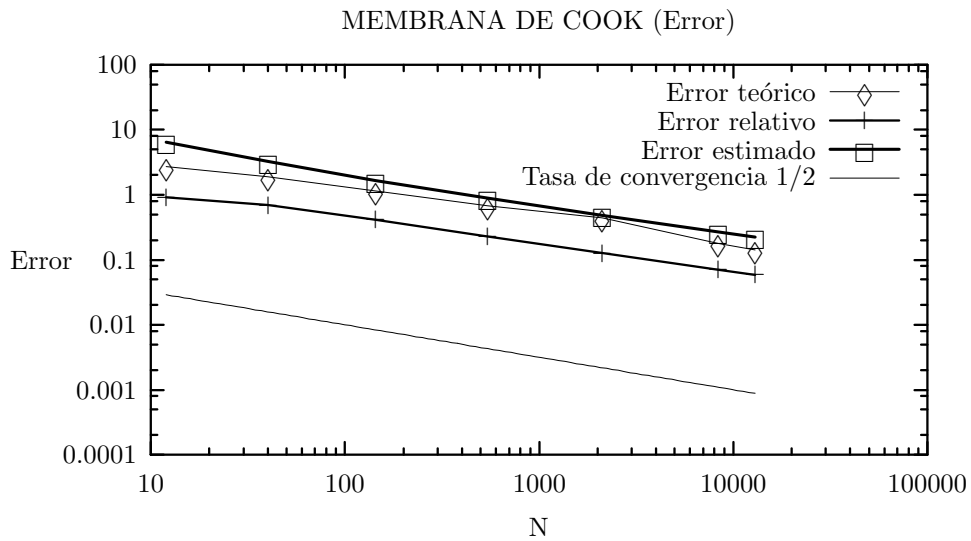


Figura 4.26: *Membrana de Cook. Elasticidad finita. Error Global*

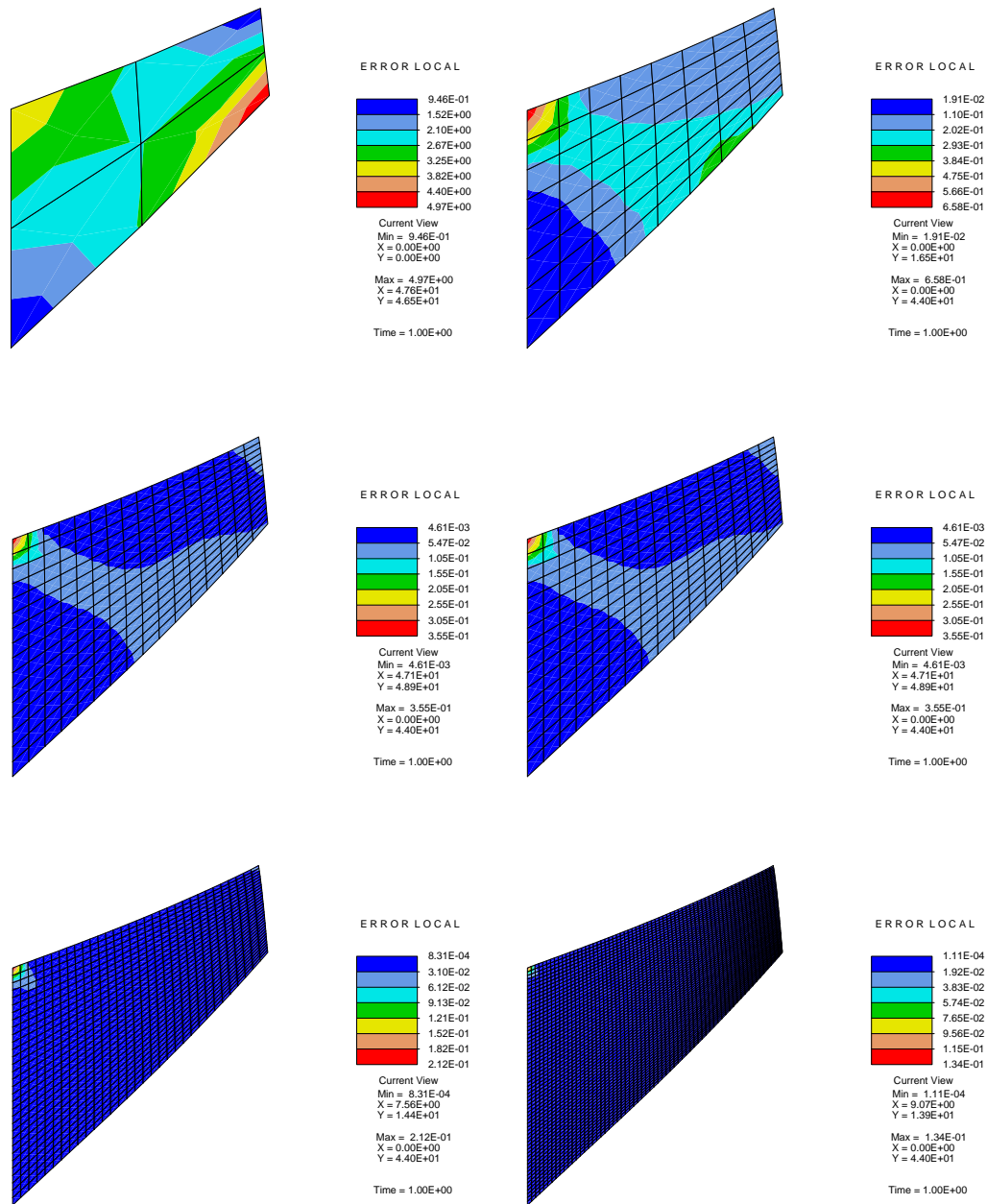


Figura 4.27: *Membrana de Cook. Elasticidad finita. Contornos de error local. Mallas de 4, 16, 64, 256, 1024, 4096 y 6400 elementos*

Junta de goma

Este ejemplo analiza el problema de una junta de goma, propuesto para la estimación de error en problemas de elasticidad con deformaciones finitas en (Brink y Stein, 1998), y que resuelven con un material hiperelástico de Ogden. La geometría de la junta se muestra en la figura 4.28, donde \mathbf{u} indica los desplazamientos impuestos. El valor de dicho desplazamientos es $u = 1,6$ que equivale al 80 % del espesor de la goma. A efectos de la

discretización sólo se ha modelizado la mitad de la junta debido a la simetría existente. En este caso, el modelo constitutivo utilizado es el de un material neo-hookeano cuya función de densidad de energía interna se ha expresado en (4.147). Los valores adoptados para los coeficientes de Lamé son:

$$\begin{aligned}\lambda &= 3,3289 \cdot 10^6, \\ \mu &= 6671,1,\end{aligned}$$

que recogen adecuadamente la incompresibilidad de la goma (proporcionan un valor del coeficiente de Poisson $\nu = 0,499$).

Se han empleado seis mallas de 20, 80, 320, 1280, 2880 y 5120 elementos. En la figura 4.29 se muestra la geometría deformada de la malla de 1280 elementos, superpuesta al contorno de la malla sin deformar. Únicamente con objeto de tener un valor de referencia de la energía interna, se ha empleado una malla de 6845 elementos (13836 GDL). El valor obtenido es: $\|\varphi_{\text{ref}}\|_E = 6660,37$

Las figuras (4.30) y (4.31) muestran, respectivamente, la evolución de la energía de deformación y del estimador de error frente al número de grados

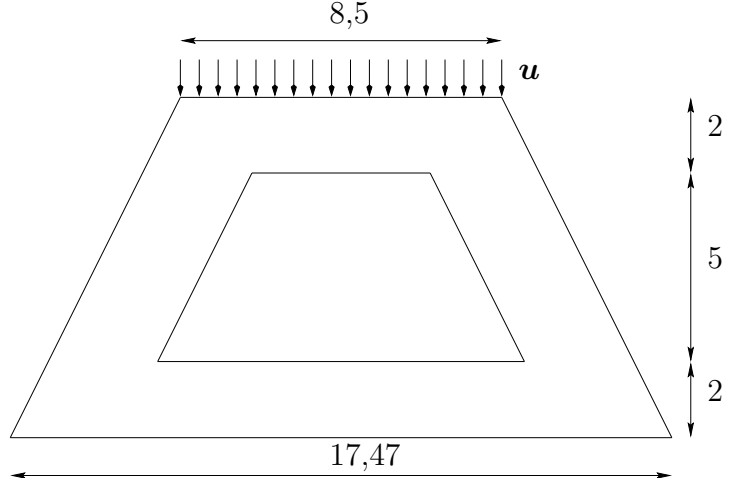


Figura 4.28: Junta de goma. Geometría y desplazamientos impuestos

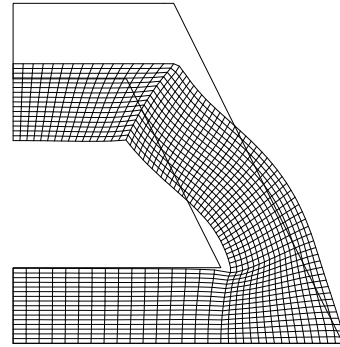


Figura 4.29: Geometría deformada

de libertad del problema. El error teórico y el error relativo se calculan según las expresiones (4.149) y (4.150), respectivamente.

En el cuadro 4.9 se muestran los valores del índice de efectividad θ (4.94) y del error relativo η , que se obtienen empleando 4 y 5 puntos de Gauss, en función del número de grados de libertad del problema. En este caso los resultados obtenidos con una y otra cuadratura también son similares.

Por último, la figura (4.32) muestra los isocontornos de error local, en las mallas de 20, 80, 320 y 1280 elementos. A efectos de representación, se ha reflejado la malla empleada en los cálculos mostrándose la junta de goma completa.

Conclusión 4.13 *Este ejemplo presenta diversas dificultades para ser resuelto con elementos formulados en desplazamientos: en ciertas zonas de la malla existe una flexión muy marcada, y el material es incompresible. Por esta razón es necesario tener mallas muy finas para que la energía de deformación $\|\varphi_h\|_E$ tome un valor próximo al de referencia $\|\varphi_{ref}\|_E$. Dado que con los elementos con deformaciones supuestas se obtienen resultados aceptables con mallas gruesas (ver figura 4.30), la energía asociada a los modos incompatibles es elevada, y por tanto los valores del estimador de error también son altos (ver figura 4.31)*

Conclusión 4.14 *De acuerdo con la figura (4.31), el error teórico y el error estimado muestran tendencias muy similares. Asimismo, el estimador de error decrece con el número de grados de libertad del modelo. En este ejemplo, la tasa de convergencia obtenida es ligeramente inferior a un medio.*

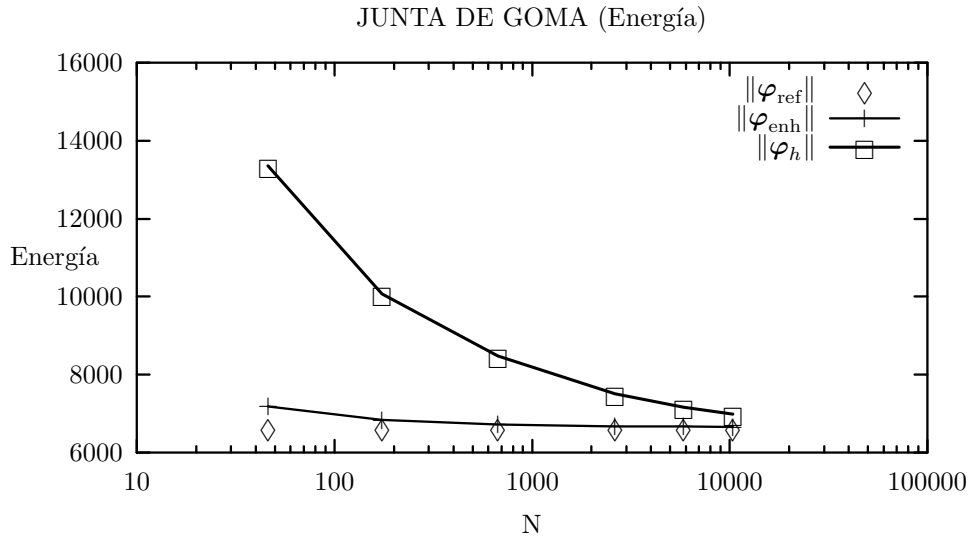


Figura 4.30: *Junta de Goma. Energía de deformación*

<i>GDL</i>	θ (4 P.G)	θ (5 P.G)	η (4 P.G)	η (5 P.G)
46	4,1891	4,0869	0,94760	0,94516
174	3,6104	3,5757	0,90284	0,90122
670	2,8683	2,8551	0,79859	0,79725
2622	2,5747	2,5313	0,65359	0,64721
5854	2,7501	2,6098	0,58695	0,56680
10366	3,1057	2,8177	0,56028	0,52304

Cuadro 4.9: *Junta de goma. Índice de efectividad θ y error relativo η*

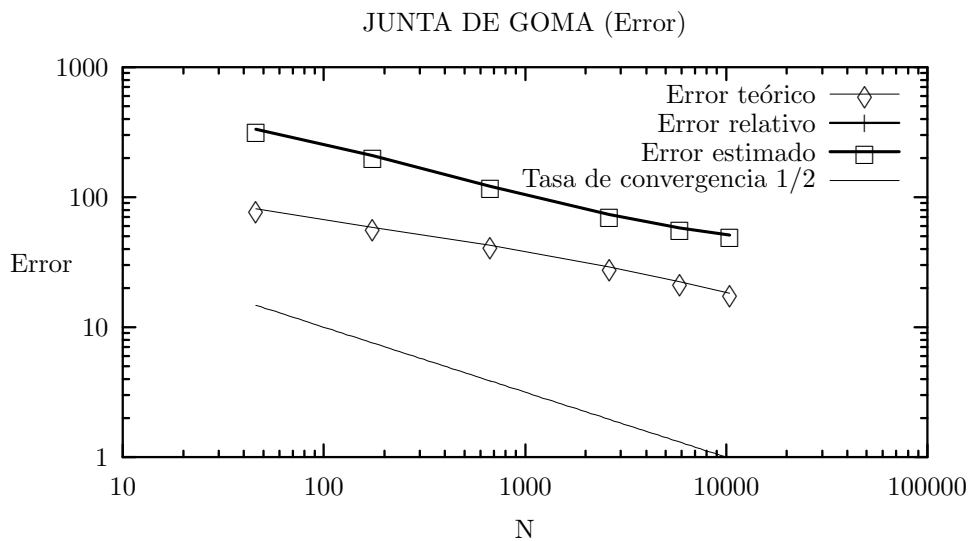


Figura 4.31: *Junta de Goma. Error global*

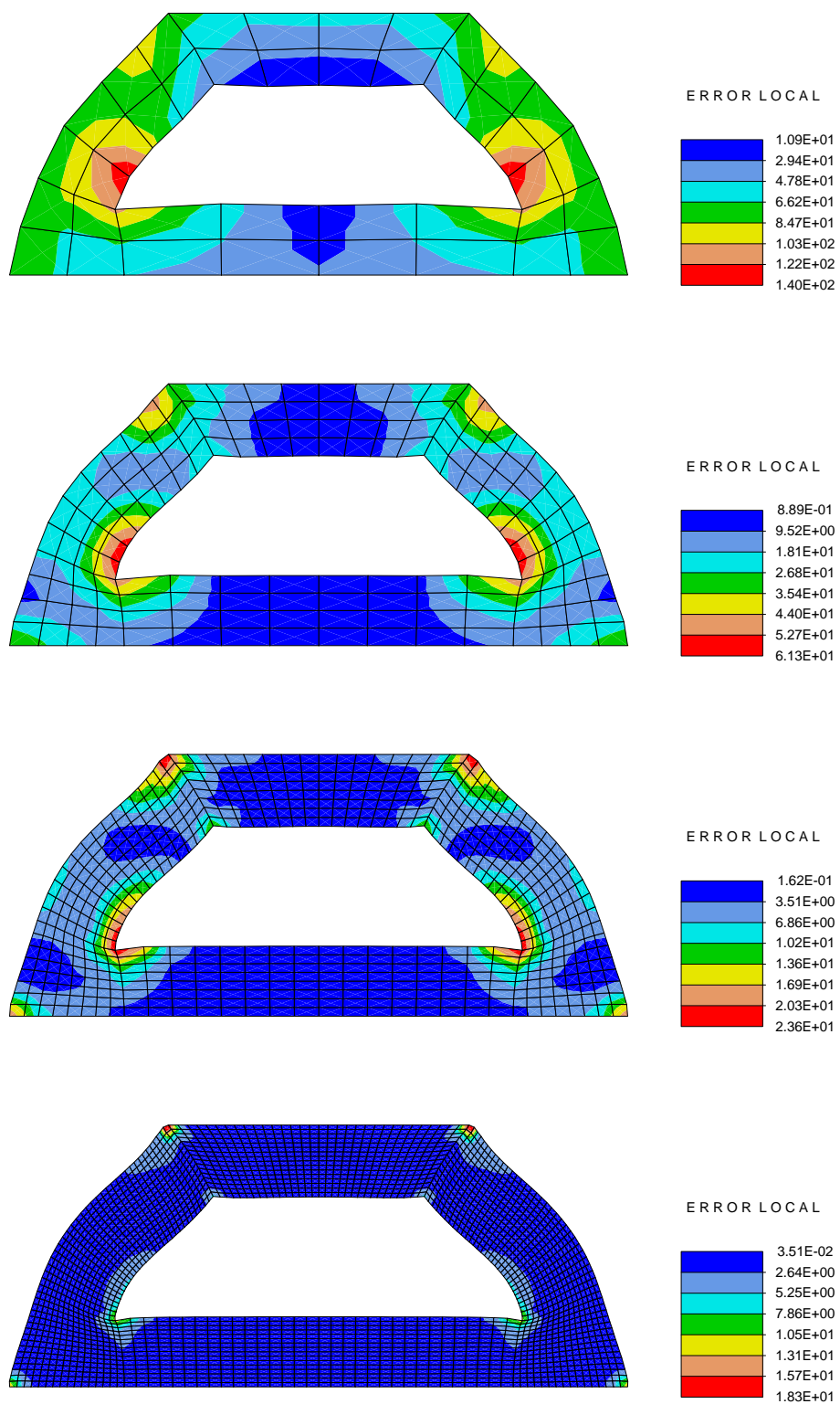


Figura 4.32: Junta de goma. Contornos de error local. Mallas de 20, 80, 320 y 1280 elementos

4.5. Plasticidad en pequeñas deformaciones

4.5.1. Integración variacional de las ecuaciones de la plasticidad

La integración variacional de las ecuaciones de la plasticidad ([Ortiz y Stainier, 1998](#)) se basa en la existencia una función incremental de densidad de energía W , tal que:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}} \quad (4.153)$$

En el caso general de un problema dinámico con viscoplasticidad, la dependencia funcional de W es:

$$W = W(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}, \boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t}, \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\xi}_t, \Delta t) \quad (4.154)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de deformaciones infinitesimales, $\boldsymbol{\xi}$ son las variables internas y $\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\xi}_t$ se interpretan como las condiciones iniciales del problema en el instante t .

A continuación se particularizan, para el caso de la plasticidad infinitesimal de Von Mises con endurecimiento isotrópico, los resultados presentados por Ortiz ([Ortiz y Stainier, 1998](#)) en el contexto de la viscoplasticidad con grandes deformaciones.

El potencial incremental en este caso depende de las deformaciones, de las deformaciones plásticas y de la variable interna ξ , que es la deformación plástica efectiva. La expresión del potencial es:

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p, \xi_{t+\Delta t}, \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t^p, \xi_t) \\ = \min_{\xi_{t+\Delta t}} \left(\Psi_{t+\Delta t}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p, \xi_{t+\Delta t}) - \Psi_t(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t^p, \xi_t) \right) \end{aligned} \quad (4.155)$$

siendo $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \xi)$ la función de energía libre.

Observación 4.5.1 *La dependencia funcional del potencial incremental W expresada en (4.155) se restringe a materiales homogéneos. Para materiales no homogéneos W dependería además del punto \mathbf{x} del sólido.*

Observación 4.5.2 *En la expresión (4.155), el valor de Δt está considerado de forma implícita. Δt figura explícitamente en problemas dinámicos y en problemas con términos de viscosidad.*

En los sólidos con plasticidad de Von Mises (como pueden ser los materiales metálicos), la respuesta elástica es independiente de los fenómenos asociados a las distorsiones irreversibles de la red cristalina, y la densidad de energía libre Ψ se puede descomponer aditivamente en una parte elástica y en una parte irreversible:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \xi) = \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \Psi^p(\xi) \quad (4.156)$$

Observación 4.5.3 En la expresión (4.156), la parte elástica de la energía libre Ψ^e depende únicamente de las deformaciones elásticas. Admitiendo la descomposición aditiva del tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ en una parte elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ y otra parte plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

en lo sucesivo la función Ψ se expresará como:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \xi) = \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \Psi^p(\xi) \quad (4.157)$$

Sustituyendo (4.157) en (4.155) resulta que el potencial incremental W se puede escribir en la forma:

$$W = \min_{\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}} \left(\Psi_{t+\Delta t}^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p) + \Psi_{t+\Delta t}^p(\xi_{t+\Delta t}) - \Psi_t^e(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_t^p) + \Psi_t^p(\xi_t) \right) \quad (4.158)$$

La condición de mínimo en (4.158), equivale a imponer la condición:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{t+\Delta t}} \left(\Psi_{t+\Delta t}^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p) + \Psi_{t+\Delta t}^p(\xi_{t+\Delta t}) - \Psi_t^e(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_t^p) + \Psi_t^p(\xi_t) \right) = 0 \quad (4.159)$$

es decir,

$$\frac{\partial \Psi_{t+\Delta t}^p(\xi_{t+\Delta t})}{\partial \xi_{t+\Delta t}} = 0 \quad (4.160)$$

Para demostrar que la función W expresada en (4.158) es un potencial, se toma una variación arbitraria del campo de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}$:

$$\delta W = \left(\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}} + \frac{\partial W}{\partial \xi_{t+\Delta t}} \frac{\partial \xi_{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} \quad (4.161)$$

Imponiendo en (4.161) la condición de optimización (4.159) resulta:

$$\delta W = \frac{\partial \Psi_{t+\Delta t}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p, \xi_{t+\Delta t})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} \quad (4.162)$$

Dado que $\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}$ es la fuerza termodinámicamente conjugada de $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}$ respecto de la función de densidad de energía libre, (4.162) se puede escribir:

$$\delta W = \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} \quad (4.163)$$

y como $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}$ es arbitrario, esta igualdad implica que:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}} \quad (4.164)$$

Por tanto queda demostrado que la función definida en (4.158) es el potencial incremental del campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}$.

4.5.2. Interpretación numérica del potencial incremental

La interpretación numérica de la condición de optimización de (4.158) se puede hacer de forma exacta para el caso particular de la plasticidad de Von-Mises. En este trabajo dicha interpretación se hace en el contexto de la implementación computacional de las ecuaciones de la plasticidad descrita en el apéndice A.

El problema se formula en el contexto de las deformaciones infinitesimales. La energía libre elástica Ψ^e se considera la correspondiente a un material elástico lineal isótropo que verifica la ley de Hooke:

$$\Psi^e = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \cdot \mathbf{C}^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (4.165)$$

Sustituyendo (4.165) en (4.158) antes de optimizar, se obtiene:

$$\begin{aligned} W^* = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p) \cdot \mathbf{C}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p) + \Psi^p(\xi_{t+\Delta t}) \\ - \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_t^p) - \Psi^p(\xi_t) \end{aligned} \quad (4.166)$$

Llamando $\mathbf{s}_{t+\Delta t}$ al desviador del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}$ y sustituyendo la discretización de la regla de flujo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_t^p + \sqrt{\frac{3}{2}}(\xi_{t+\Delta t} - \xi_t) \frac{\mathbf{s}_{t+\Delta t}}{\|\mathbf{s}_{t+\Delta t}\|} \quad (4.167)$$

en (4.166), al imponer la condición:

$$\frac{\partial W^*}{\partial \xi_{t+\Delta t}} = 0$$

resulta:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}_{t+\Delta t}}{\|\mathbf{s}_{t+\Delta t}\|} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} - \frac{\partial \Psi^p}{\partial \xi_{t+\Delta t}} = 0 \quad (4.168)$$

que se puede expresar como:

$$\frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}_{t+\Delta t} \cdot \mathbf{s}_{t+\Delta t}}{\|\mathbf{s}_{t+\Delta t}\|} - \frac{\partial \Psi^p}{\partial \xi_{t+\Delta t}} = 0 \quad (4.169)$$

Finalmente, sustituyendo en (4.169) la expresión del segundo invariante del tensor $\mathbf{s}_{t+\Delta t}$, resulta:

$$\sqrt{3 J_{2,t+\Delta t}} = \frac{\partial \Psi^p}{\partial \xi_{t+\Delta t}} \quad (4.170)$$

La ecuación (4.170) expresa la condición de óptimo del potencial incremental definido en (4.158). Dicha ecuación representa, en el caso de la plasticidad de Von-Mises, el dominio elástico en el instante $t + \Delta t$

Observación 4.5.4 *El potencial definido en (4.158) engloba el conjunto de ecuaciones de la plasticidad (ver apéndice A). Las relaciones tensión-deformación figuran explícitamente en la expresión de W . Las demás ecuaciones quedan implícitas en la condición de optimización.*

Observación 4.5.5 *La energía libre irreversible correspondiente a un material con endurecimiento isotrópico lineal de módulo H es:*

$$\Psi^p = Y\xi + \frac{1}{2}H\xi^2 \quad (4.171)$$

siendo Y la tensión de fluencia inicial.

Sustituyendo (4.171) en (4.170) resulta:

$$\sqrt{3 J_{2,t+\Delta t}} = Y + H\xi_{t+\Delta t} \quad (4.172)$$

Observación 4.5.6 *En el caso de un material cuyo endurecimiento viene dado por una ley de saturación, la energía libre irreversible es:*

$$\Psi^p = Y_0\xi + (Y_\infty - Y_0) \left(\xi + \frac{e^{-\beta\xi}}{\beta} \right) + \frac{1}{2}H\xi^2 \quad (4.173)$$

siendo Y_0 la tensión de fluencia inicial, Y_∞ la tensión de fluencia a tiempo infinito, β el exponente de saturación y H el módulo de endurecimiento constante. Sustituyendo esta expresión en (4.170) se obtiene:

$$\sqrt{3 J_{2,t+\Delta t}} = Y_0 + (Y_\infty - Y_0)(1 - e^{-\beta\xi_{t+\Delta t}}) + H\xi_{t+\Delta t} \quad (4.174)$$

4.5.3. Problema de contorno

Considerando las definiciones formales anteriormente dadas, en el caso de la plasticidad infinitesimal el problema de contorno se plantea de manera incremental en los siguientes términos:

Dadas $\mathbf{b}_{t+\Delta t} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} : \partial_u \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{t}}_{t+\Delta t} : \partial_t \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, y las condiciones iniciales: $\mathbf{u}_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\xi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; encontrar $\mathbf{u}_{t+\Delta t} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\xi_{t+\Delta t} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que cumplan las ecuaciones:

$$\text{Ecuaciones de Equilibrio: } \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} + \mathbf{b}_{t+\Delta t} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega \quad (4.175)$$

$$\text{con } \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}_{t+\Delta t} \text{ en } \partial_t \Omega \quad (4.176)$$

$$\text{Ecuaciones de Compatibilidad: } \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} = \nabla^s \mathbf{u}_{t+\Delta t} \text{ en } \Omega \quad (4.177)$$

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \bar{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \text{ en } \partial_u \Omega \quad (4.178)$$

y las ecuaciones constitutivas de la plasticidad, detalladas en el apéndice A. Los desplazamientos y tensiones prescritos son $\bar{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ y $\bar{\mathbf{t}}_{t+\Delta t}$, y ∇^s es la parte simétrica del operador gradiente.

4.5.4. Estructura variacional del problema de contorno

Siguiendo la metodología de los apartados 4.3 y 4.4, en este apartado se obtienen las condiciones necesarias para que el problema de contorno expresado en el apartado 4.5.3 tenga estructura variacional y la expresión del funcional correspondiente, a partir del teorema de Veinberg (ver C.7.6). En este caso, las ecuaciones (4.175; 4.176; 4.177; 4.178) se expresan mediante el operador diferencial incremental $\mathbf{A}_{t+\Delta t}$:

$$\mathbf{A}_{t+\Delta t}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p, \xi_{t+\Delta t}, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t^p, \xi_t) = \mathbf{0} \quad (4.179)$$

donde:

$$\mathbf{A}_{t+\Delta t}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}, \cdot) = \begin{cases} \nabla \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} + \mathbf{b}_{t+\Delta t} & \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}}_{t+\Delta t} & \text{en } \partial_t \Omega \end{cases} \quad (4.180)$$

Las condiciones necesarias para que el problema de contorno tenga estructura variacional se obtienen aplicando la condición de reciprocidad:

$$\begin{aligned} \delta G(\mathbf{u}_{t+\Delta t})[\delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}, \delta \mathbf{v}_{t+\Delta t}] &= \delta G(\mathbf{u}_{t+\Delta t})[\delta \mathbf{v}_{t+\Delta t}, \delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}] \\ \forall \delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}, \delta \mathbf{v}_{t+\Delta t} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \text{ admisibles} \end{aligned} \quad (4.181)$$

En la expresión (4.181), $G(\mathbf{u}_{t+\Delta t})[\delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}]$ es la forma débil de $\mathbf{A}_{t+\Delta t}$:

$$G(\mathbf{u}_{t+\Delta t})[\delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}] = \int_{\Omega} \mathbf{A}_{t+\Delta t} \cdot \delta \mathbf{u}_{t+\Delta t} d\Omega$$

$\delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}, \delta \mathbf{v}_{t+\Delta t}$ son variaciones admisibles en $t + \Delta t$:

$$\delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}|_{\partial_u \Omega} = \delta \mathbf{v}_{t+\Delta t}|_{\partial_u \Omega} = \mathbf{0}$$

Operando la expresión (4.181) de manera análoga a como se hizo en los apartados 4.3.2 y 4.4.2, se obtiene:

$$\text{rot}(\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (4.182)$$

$$\text{rot}(\bar{\mathbf{t}}_{t+\Delta t}) = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial_t \Omega \quad (4.183)$$

Por tanto, para que el problema de contorno tenga estructura variacional es necesario que $\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}$ y $\bar{\mathbf{t}}_{t+\Delta t}$ deriven de un potencial:

$$\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}} \quad (4.184)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_{t+\Delta t} = \frac{\partial \Phi_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{u}_{t+\Delta t}} \quad (4.185)$$

Observación 4.5.7 La expresión (4.184) se verifica tomando la expresión del potencial dada en (4.155), tal y como se ha demostrado en el apartado 4.5.1.

La expresión del funcional correspondiente también se obtiene mediante el teorema de Veinberg:

$$\begin{aligned}\Pi_p(\mathbf{u}_{t+\Delta t}) &= \int_0^1 G(\lambda \mathbf{u}_{t+\Delta t})[\mathbf{u}_{t+\Delta t}] d\lambda \\ &= \int_0^1 \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t} \cdot \nabla \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{b}_{t+\Delta t} \cdot \mathbf{u}_{t+\Delta t}) d\Omega \right] d\lambda \\ &\quad - \int_0^1 \left[\int_{\partial_t \Omega} \bar{\mathbf{t}}_{t+\Delta t}(\lambda \mathbf{u}_{t+\Delta t}) \cdot \mathbf{u}_{t+\Delta t} d\Gamma \right] d\lambda\end{aligned}\quad (4.186)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}(\lambda \nabla^s \mathbf{u}_{t+\Delta t}) \cdot \nabla \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \frac{\partial W(\lambda \nabla^s \mathbf{u}_{t+\Delta t})}{\partial \lambda} \\ \bar{\mathbf{t}}(\lambda \mathbf{u}_{t+\Delta t}) \cdot \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \frac{\partial \Phi(\lambda \mathbf{u}_{t+\Delta t})}{\partial \lambda}\end{aligned}$$

y operando en (4.186), se obtiene finalmente:

$$\Pi_p(\mathbf{u}_{t+\Delta t}) = \int_{\Omega} (W - \mathbf{b}_{t+\Delta t} \cdot \mathbf{u}_{t+\Delta t}) d\Omega - \int_{\partial_t \Omega} \Phi(\mathbf{u}_{t+\Delta t}) d\Gamma \quad (4.187)$$

Es fácil comprobar que el problema variacional correspondiente a igualar a cero la primera variación de $\Pi_p(\mathbf{u}_{t+\Delta t})$, da lugar a las ecuaciones incrementales de Euler-Lagrange expresadas en (4.175; 4.176). La forma de Dirichlet de $\Pi_p(\mathbf{u}_{t+\Delta t})$ se obtiene haciendo la segunda variación en (4.187), y resulta:

$$a(\mathbf{u}_{t+\Delta t})[\delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}, \delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}] = \int_{\Omega} \nabla^s \delta \mathbf{u}_{t+\Delta t} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} \partial \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}} \nabla^s \delta \mathbf{u}_{t+\Delta t} d\Omega \quad (4.188)$$

Al tensor $\mathbf{C}_{t+\Delta t}$ definido por:

$$\mathbf{C}_{t+\Delta t} = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} \partial \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}} \quad (4.189)$$

se le denomina tensor de módulos tangentes. De acuerdo con la expresión (4.164), W actúa como un potencial incremental del campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}$. Por tanto, si se verifican las condiciones de regularidad:

$$1. \mathbf{C} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \quad (4.190)$$

$$2. a(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}, \delta \mathbf{u}_{t+\Delta t}] \text{ es estable. (Ver observación 4.3.2).} \quad (4.191)$$

se cumple:

- I) $\Pi_p(\mathbf{u}_{t+\Delta t})$ es convexo
- II) $\Pi_p(\mathbf{u}_{t+\Delta t})$ tiene un mínimo y es único; es decir, la solución $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ del problema de contorno verifica:

$$\Pi_p(\mathbf{u}_{t+\Delta t}) = \inf_{\mathbf{v}_{t+\Delta t} \in V} \Pi_p(\mathbf{v}_{t+\Delta t}) \quad (4.192)$$

siendo V el espacio de funciones de energía finita.

Como ya se ha mencionado en apartados anteriores, estas condiciones son necesarias para poder establecer la cota de error que se emplea en este trabajo. Asumiendo que dichas condiciones se cumplen, la metodología a seguir para la estimación de error es prácticamente la ya descrita en los apartados 4.3 y 4.4, por lo que no se va a repetir otra vez en este apartado. Los pasos a seguir son:

1. Definir la metodología de aproximación (ver apartado 4.3.3)
2. Definir la estimación local del error (ver apartado 4.3.4)
3. Definir la estimación global del error (ver apartado 4.3.5)

Observación 4.5.8 *Para aplicar directamente lo expresado en los apartados 4.3.3, 4.3.4 y 4.3.5 al caso elastoplástico, basta con sustituir las expresiones del campo de desplazamientos exacto \mathbf{u} y aproximado \mathbf{u}_h por los correspondientes valores incrementales: $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ y $\mathbf{u}_{h,t+\Delta t}$, respectivamente.*

Observación 4.5.9 *En el ámbito de la plasticidad es frecuente encontrarse con problemas en que el potencial incremental W deja de ser convexo. Este hecho se puede corregir introduciendo términos viscosos de regularización en la expresión de W (Radovitzky y Ortiz, 1998).*

4.5.5. Estimador de error propuesto en este trabajo

Uno de los puntos de interés de la metodología presentada en este capítulo es que para los problemas elastoplásticos, se propone el mismo estimador de error que para los problemas de elasticidad infinitesimal (apartado 4.3.7) y con deformaciones finitas (apartado 4.4.6). Empleando la norma de la energía, en el instante $t + \Delta t$ se parte de la desigualdad triangular:

$$\|\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{h,t+\Delta t}\|_E \leq \|\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{\text{enh},t+\Delta t}\|_E + \|\mathbf{u}_{\text{enh},t+\Delta t} - \mathbf{u}_{h,t+\Delta t}\|_E \quad (4.193)$$

donde:

$\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ es la solución exacta en $t + \Delta t$

$\mathbf{u}_{h,t+\Delta t}$ es la solución aproximada, obtenida con elementos formulados en desplazamientos, en $t + \Delta t$

$\mathbf{u}_{\text{enh},t+\Delta t}$ es la solución aproximada, obtenida con elementos de deformaciones supuestas, en $t + \Delta t$

Observación 4.5.10 *La norma energética empleada en (4.193) se calcula mediante la expresión:*

$$\|\mathbf{u}_{t+\Delta t}\|^2 = \int_{\Omega^e} W(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e(\mathbf{u}), \boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}_t^e(\mathbf{u}), \boldsymbol{\xi}_t(\mathbf{u})) d\Omega \quad (4.194)$$

Observación 4.5.11 *A pesar de que con la expresión (4.193) se obtiene un valor incremental, es más riguroso tomar como criterio de notación $\|\mathbf{u}_{t+\Delta t}\|$ en vez de $\|\mathbf{u}_{\Delta t}\|$. Este último criterio induciría erróneamente a pensar que el cálculo se efectúa con los desplazamientos incrementales, cuando realmente se efectúa con los calculados en el instante $t + \Delta t$ y con los almacenados en la base de datos correspondientes al instante t .*

Para eliminar el primer sumando de la derecha en (4.193), se hace la misma hipótesis que en apartados anteriores:

Hipótesis 4.5.1 *Siendo m y p los órdenes de convergencia, en el instante $t + \Delta t$, de las soluciones con formulación en desplazamientos y con deformaciones mejoradas:*

$$\|\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{\text{enh},t+\Delta t}\|_E = o(h^m) \quad (4.195)$$

$$\|\mathbf{u}_{\text{enh},t+\Delta t} - \mathbf{u}_{h,t+\Delta t}\|_E = o(h^p) \quad (4.196)$$

al menos en el régimen asintótico ha de verificarse:

$$m > p \quad (4.197)$$

Verificándose esta hipótesis, en el régimen asintótico se puede establecer:

$$\|\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{h,t+\Delta t}\|_E \leq C \|\mathbf{u}_{\text{enh},t+\Delta t} - \mathbf{u}_{h,t+\Delta t}\|_E \quad C \in \mathbb{R}^+ \quad (4.198)$$

La interpretación de la condición establecida en la hipótesis anterior es la ya descrita en apartados anteriores:

Observación 4.5.12 *Las condiciones (4.195), (4.196) y (4.197) garantizan que, en $t + \Delta t$, las soluciones $\mathbf{u}_{\text{enh},t+\Delta t}$ y $\mathbf{u}_{h,t+\Delta t}$ convergen a la solución exacta, de manera que:*

1. $\|\mathbf{u}_{\text{enh},t+\Delta t} - \mathbf{u}_{h,t+\Delta t}\|_E$ decrece según se refina la malla
2. La solución obtenida con los elementos mejorados se aproxima a la solución exacta “mejor” que la solución de elementos en desplazamientos a la solución de elementos mejorados, al menos en régimen asintótico.

El estimador de error local que se propone en este trabajo es:

$$E_{\Delta t}^e = \|\mathbf{u}_{\text{enh},t+\Delta t}^e - \mathbf{u}_{h,t+\Delta t}^e\|_E \quad (4.199)$$

La cota de error propuesta en (4.199) es una cota incremental. Para conocer el error de discretización a lo largo del proceso de carga es necesario calcular los valores acumulados de $E_{\Delta t}^e$. Si n_{inc} es el número de incrementos de carga necesarios para llegar al instante $t + \Delta t$, el error local acumulado se evalúa con la expresión:

$$(E_{t+\Delta t}^e)^2 = \sum_{i=1}^{n_{\text{inc}}} (E_{\Delta t_i}^e)^2 \quad (4.200)$$

Observación 4.5.13 *De forma rigurosa, en un caso general no se puede garantizar que la suma (4.200) sea una medida del error global para todo el camino de carga. En efecto, todos los errores incrementales son positivos. Es cuestionable que en un proceso no lineal y no conservativo pueda obtenerse una estimación rigurosa y con validez general del error. Sin embargo, de acuerdo con los resultados obtenidos (ver apartado 4.5.6), se comprueba que (4.200) en muchos casos es una medida útil y válida para cuantificar el error.*

Utilizando el potencial incremental W definido en el apartado 4.5.1, el estimador de error (4.199) se interpreta como la contribución de los modos incompatibles de los elementos mejorados a la función de energía libre:

$$(E_{\Delta t}^e)^2 = \int_{\Omega^e} W(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e(\mathbf{u}), \boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}_t^e - \boldsymbol{\varepsilon}_t^e(\mathbf{u}), \boldsymbol{\xi}_t - \boldsymbol{\xi}_t(\mathbf{u})) d\Omega \quad (4.201)$$

Observación 4.5.14 *La cota de error propuesta en (4.201) tiene como ventaja que es una cota local y por tanto se evalúa elemento por elemento, sin necesidad de tener que calcular suavizados globales*

Observación 4.5.15 *Existen dos maneras alternativas de estimar el error incremental:*

1. *Mediante la expresión (4.201) adoptada aquí, que se puede interpretar como una medida energética del error.*
2. *Mediante la diferencia de las energías:*

$$(E_{\Delta t}^e)^2 = \left| \int_{\Omega^e} W_{\text{enh}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}, \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p, \boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t}, \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_t^p, \boldsymbol{\xi}_t) d\Omega - \int_{\Omega^e} W_{\text{com}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^p(\mathbf{u}), \boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}_t(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}_t^p(\mathbf{u}), \boldsymbol{\xi}_t(\mathbf{u})) d\Omega \right| \quad (4.202)$$

siendo W_{enh} el potencial obtenido con los elementos mejorados y W_{com} el obtenido con los elementos compatibles. Esta alternativa se podría interpretar como un error en la medida de las energías.

En el contexto del presente trabajo se han realizado diversas pruebas comparando los resultados que se obtienen con (4.202) y (4.201). De dichas comparaciones se ha concluido que aunque existen diferencias cuantitativas, los resultados cualitativos son muy similares tanto en la evolución del error global a lo largo del proceso de carga, como en la distribución en cada instante de los errores locales.

Las densidad de energía de la expresión (4.201) se puede operar, empleando (4.157), para descomponer aditivamente las contribuciones de la parte elástica y la parte plástica de la energía libre:

$$W = \underbrace{\left[\Psi_{t+\Delta t}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e(\mathbf{u})) - \Psi_t^e (\boldsymbol{\varepsilon}_t^e - \boldsymbol{\varepsilon}_t^e(\mathbf{u})) \right]}_{W^e} + \underbrace{\left[\Psi_{t+\Delta t}^p (|\xi_{t+\Delta t} - \xi_{t+\Delta t}(\mathbf{u})|) - \Psi_t^p (|\xi_t - \xi_t(\mathbf{u})|) \right]}_{W^p} \quad (4.203)$$

Empleando (4.203), la expresión (4.201) se puede expresar:

$$(E_{\Delta t}^e)^2 = \int_{\Omega^e} W^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}_t^e - \boldsymbol{\varepsilon}_t^e(\mathbf{u})) d\Omega + \int_{\Omega^e} W^p (\xi_{t+\Delta t} - \xi_{t+\Delta t}(\mathbf{u}), \xi_t - \xi_t(\mathbf{u})) d\Omega \quad (4.204)$$

Observación 4.5.16 La expresión (4.204) tiene la ventaja de que permite discriminar la contribución al error de discretización de los términos elásticos y de los términos correspondientes al flujo plástico.

A la vista de las expresiones (4.201; 4.203), es interesante hacer las siguientes observaciones sobre la cota de error propuesta en (4.204):

Observación 4.5.17 Las condiciones (4.195; 4.196; 4.197), generalmente no tienen porque verificarse en problemas de plasticidad.

Los elementos cuadriláteros con formulación en desplazamientos presentan bloqueo en problemas elastoplásticos, en los que el flujo plástico es incompresible. Dado que se estima el error de la solución obtenida con dichos elementos, el término $\|\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{h_{t+\Delta t}}\|$ converge lentamente a causa del fenómeno de bloqueo (e incluso en el caso límite del bloqueo completo de la malla, permanecería constante teniendo un orden de convergencia nulo).

Observación 4.5.18 El estimador de error (4.204) aplicado a los estados de deformación que corresponden a la prueba de la parcela (estados de deformación constante), es nulo y por lo tanto exacto.

Observación 4.5.19 En los pasos Δt correspondientes a estados de carga/descarga elástica, la energía libre irreversible $\Psi_{t+\Delta t}^p$ es nula y por lo tanto no contribuye al error de discretización.

El error de discretización global se obtiene extendiendo la integral en (4.201) a todo el dominio Ω . De esta manera es inmediato obtener el error global mediante la suma de los errores locales:

$$E_{\Delta t}^2 = \sum_{i=1}^{n_{\text{elm}}} (E_{\Delta t}^i)^2 \quad (4.205)$$

Finalmente el error global acumulado se obtiene mediante el sumatorio discreto de los correspondientes errores incrementales:

$$E_{t+\Delta t}^2 = \sum_{i=1}^{n_{\text{inc}}} E_{\Delta t_i}^2 \quad (4.206)$$

4.5.6. Ejemplos

Ménsula elastoplástica cargada en el extremo

En este ejemplo se considera una ménsula de longitud $L = 10$ y canto $h = 1$, con un esfuerzo cortante $F = 0,01$ aplicado en el extremo libre. El comportamiento se considera el de un material de Von-Mises, con las siguientes propiedades:

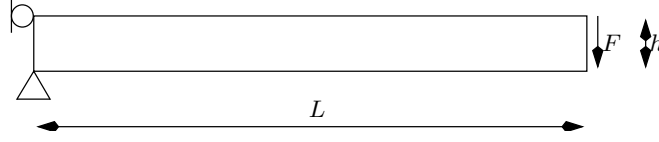


Figura 4.33: Ménsula elastoplástica. Geometría, cargas y condiciones de contorno.

$$E = 206,9 \quad \nu = 0,290 \quad Y = 0,450 \quad H = 0,129$$

donde Y es la tensión de fluencia inicial y H es el módulo de endurecimiento isotrópico. Se han empleado mallas de 2×2 , 4×4 , 8×8 , 16×16 y 32×32 elementos, que suponen 14, 44, 152, 560 y 2144 grados de libertad, respectivamente. En la figura 4.34 se muestra la energía interna calculada con los elementos mejorados y el error global estimado al final del proceso de carga, frente al número de grados de libertad. La energía de deformación converge a una rama horizontal y la tasa de convergencia estimada es algo mayor que $1/2$. En la figura 4.35 se muestran los contornos de deformación plástica efectiva para cada una de las mallas. Puede observarse que las deformaciones plásticas tienden a concentrarse en las esquinas del empotramiento³.

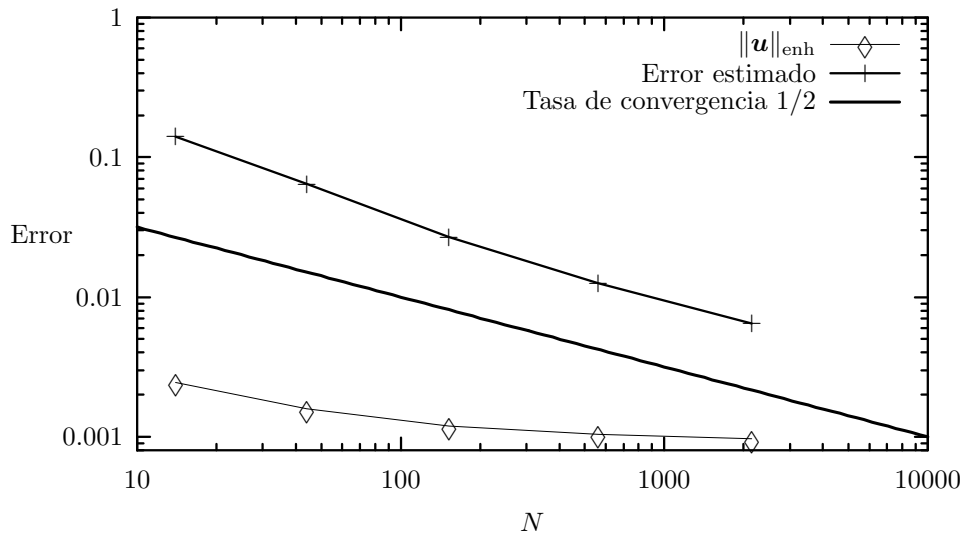


Figura 4.34: Ménsula elastoplástica. Error global y energía de deformación.

³En la malla de 2×2 elementos los contornos de deformación plástica distorsionan los resultados en los puntos de Gauss, debido al suavizado que se efectúa en el post-proceso

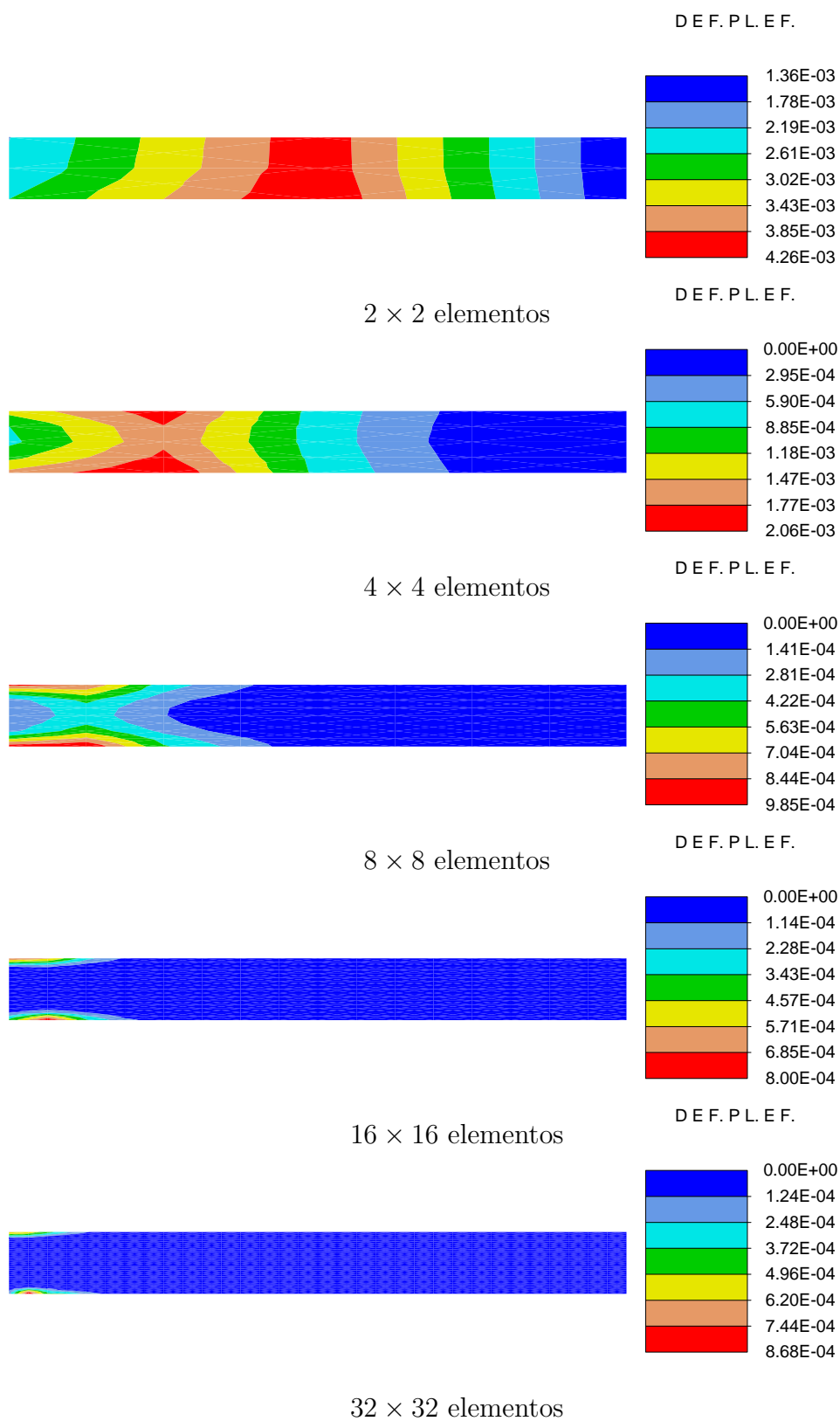


Figura 4.35: *Ménsula elastoplástica. Deformación plástica efectiva.*

En la figura 4.36 se muestran los contornos de error local al final del proceso de carga, para cada una de las mallas consideradas. Dichos errores se han evaluado mediante los valores acumulados, obtenidos en cada elemento a partir de los valores incrementales calculados con la expresión (4.204). De estos resultados cabe destacar que el error tiende a concentrarse en las esquinas del empotramiento según se refina la malla, y que los valores que se expresan en dichos contornos disminuyen con el refinamiento.

Asimismo se ha analizado la evolución del error local en el elemento de la esquina inferior izquierda. Para ello se han monitorizado por separado los dos sumandos de (4.204), expresando por separado las contribuciones al estimador de error que tienen la energía libre elástica:

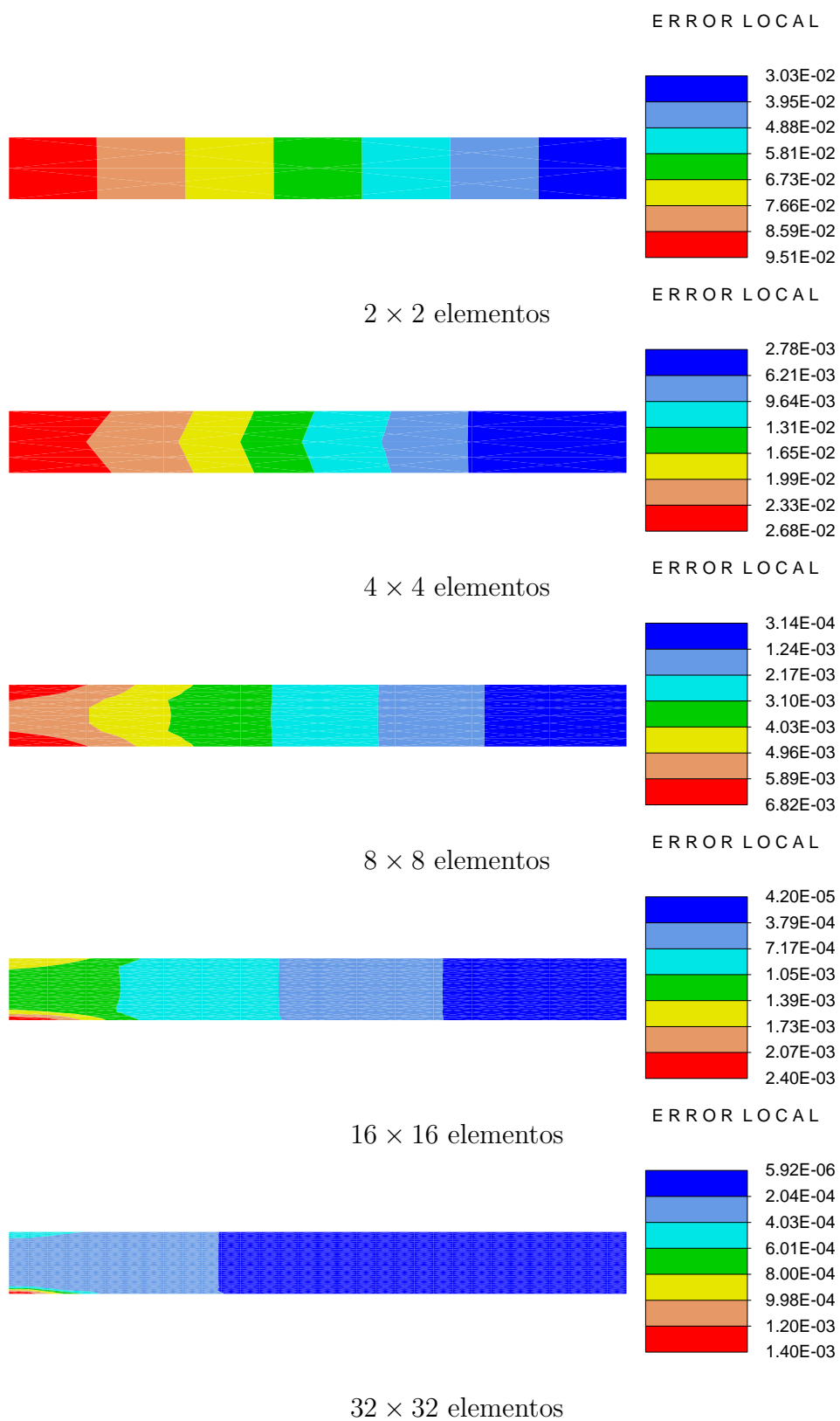
$$(E_{\Delta t}^e)_{\text{elástico}}^2 = \int_{\Omega^e} W^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t}^e(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}_t^e - \boldsymbol{\varepsilon}_t^e(\mathbf{u})) d\Omega \quad (4.207)$$

y la energía no recuperable:

$$(E_{\Delta t}^e)_{\text{plástico}}^2 = \int_{\Omega^e} W^p(\boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\xi}_t - \boldsymbol{\xi}_t(\mathbf{u})) d\Omega \quad (4.208)$$

En las figuras 4.37 y 4.38 se muestra la evolución de las partes elástica y plástica del error, expresadas en (4.207) y (4.208) respectivamente, frente a la carga aplicada. Del análisis de estas curvas se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. A lo largo del proceso de carga, las componentes elástica y plástica del error local son menores en las mallas más finas.
2. Las dos componentes del error son crecientes con la carga.
3. El orden de magnitud de las componentes elástica y plástica son similares, aunque, como es lógico, la componente plástica no se activa hasta el comienzo del flujo plástico.

Figura 4.36: *Ménsula elastoplástica. Error local.*

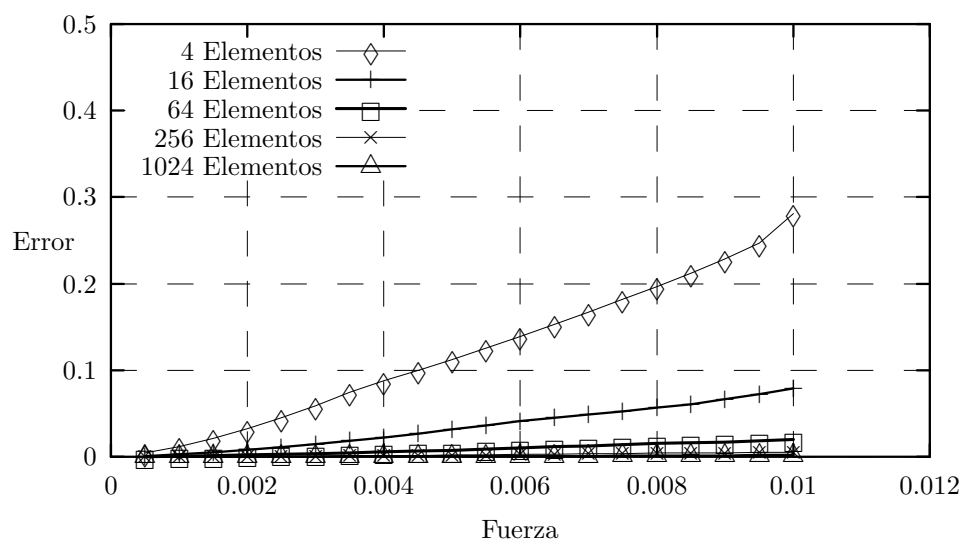


Figura 4.37: *Ménsula elastoplástica. Componente elástica del error local. Esquina inferior izquierda.*

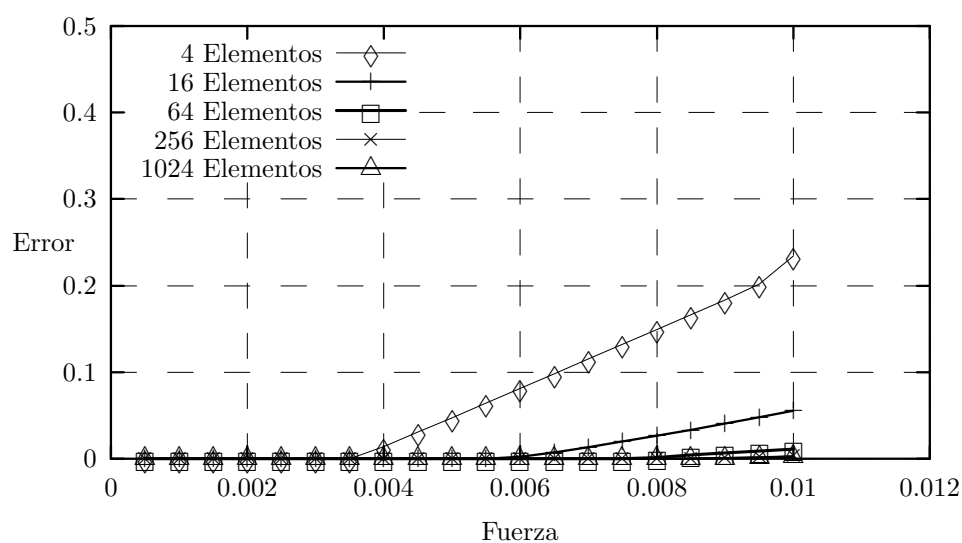


Figura 4.38: *Ménsula elastoplástica. Componente plástica del error local. Esquina inferior izquierda.*

Compresión no uniforme en deformación plana

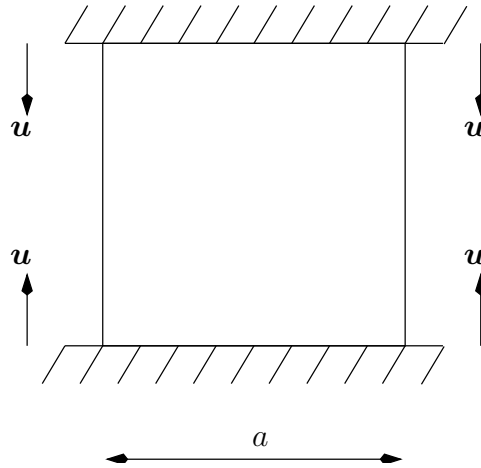


Figura 4.39: Compresión no uniforme. Geometría y condiciones de contorno

En este ejemplo se considera la compresión de una laja elastoplástica cuadrada, considerando que el rozamiento entre la prensa y la laja es infinito. En la figura 4.39 se muestra la geometría y condiciones de contorno del problema. El lado de la laja es $a = 2$, modelizándose únicamente un cuarto de la misma, por condiciones de simetría. El problema se resuelve con control de desplazamientos siendo $u = 0,0015$, el desplazamiento impuesto máximo. El modelo constitutivo empleado corresponde a un material con plasticidad de Von Mises, siendo las características mecánicas:

$$E = 1000,0 \quad \nu = 0,3 \quad Y = 1,0 \quad H = 0,0$$

Este mismo ejemplo se ha empleado en (Johnson y Hansbo, 1992) para la estimación de error en problemas elastoplásticos. Se han considerado mallas uniformes de 3×3 , 5×5 , 10×10 , 20×20 , 40×40 y 60×60 elementos, que corresponden a 17, 49, 199, 799, 3199 y 7199 grados de libertad, respectivamente.

En la figura 4.40 se muestran los contornos de deformación plástica efectiva obtenidos con cada malla. Puede observarse que dichas deformaciones tienden a localizarse en una banda a 45° , aumentando su valor según se refina la malla.

La figura 4.41 recoge la evolución al final del análisis de la energía libre calculada con los elementos mejorados y el error estimado, frente al número de grados de libertad empleado en el cálculo. Cabe destacar de este gráfico la baja tasa de convergencia obtenida con el estimador de error, que es aproximadamente igual a $1/8$. Este hecho se explica por los valores que se obtienen de la energía interna, que apenas varían con el refinamiento de la malla. En la figura 4.41 se hace patente este comportamiento para los elementos mejorados, debido al incremento de la localización de deformaciones plásticas con el refinamiento. Para los elementos con formulación en desplazamientos se produce un fenómeno similar, pero en este caso debido al bloqueo severo de los elementos en esta clase de problemas.

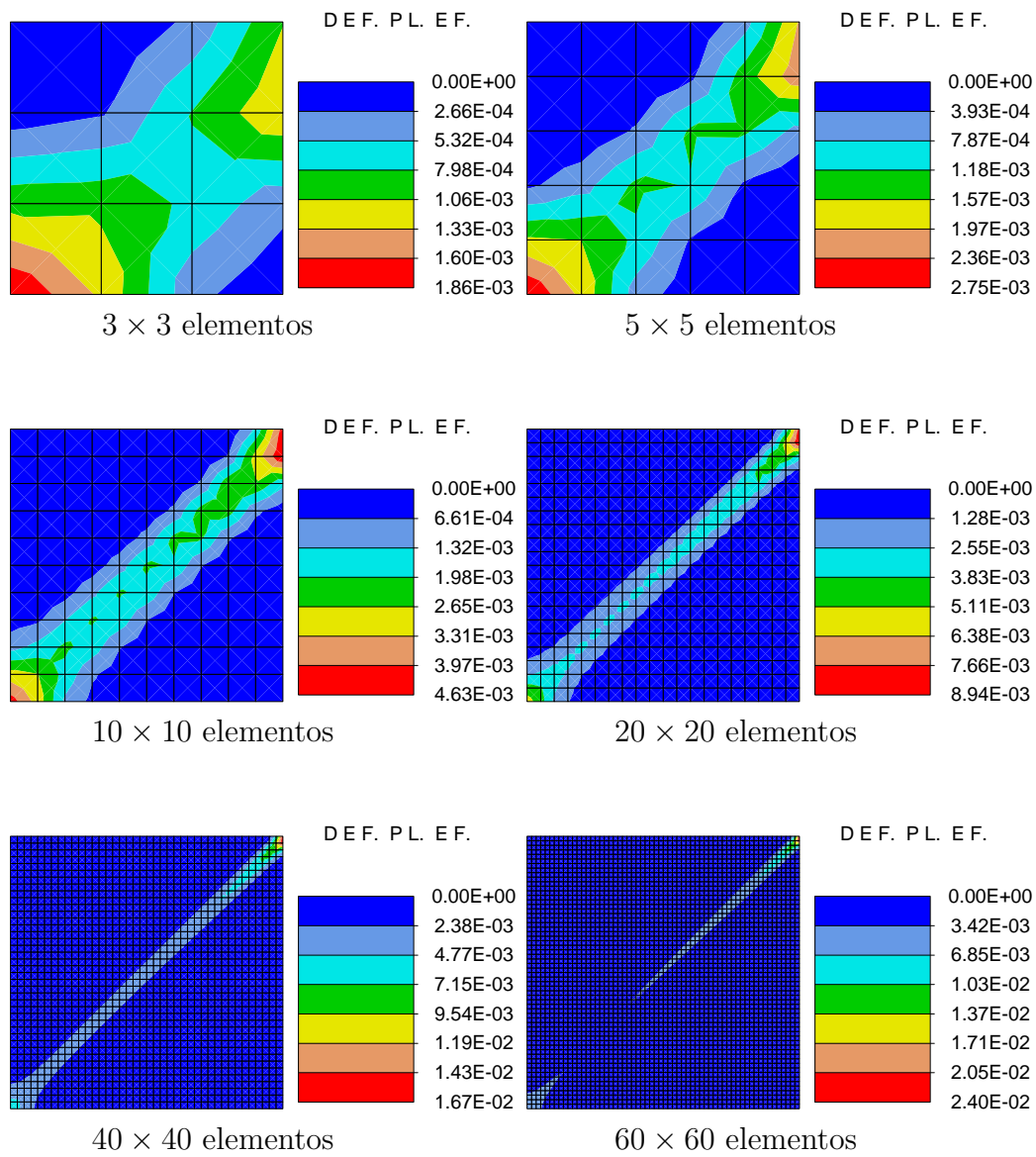


Figura 4.40: *Compresión no uniforme. Deformación plástica efectiva.*

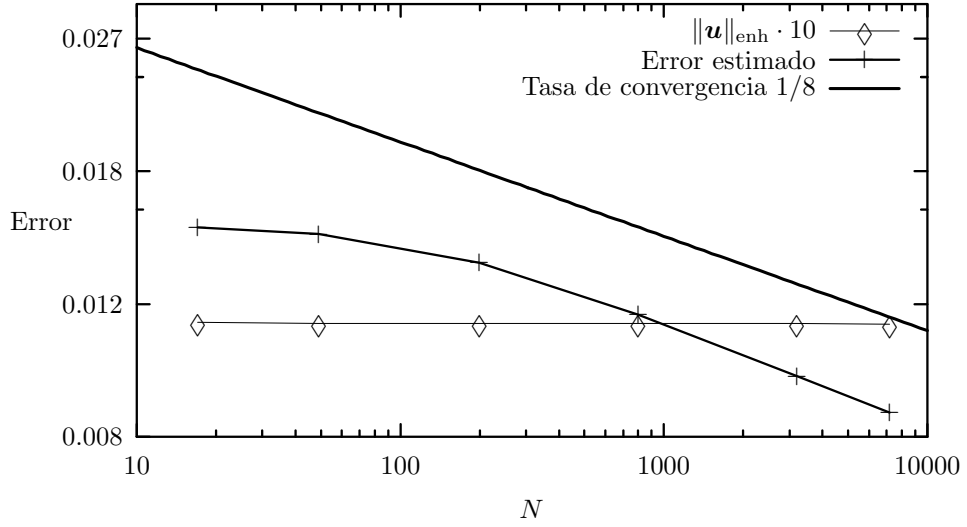


Figura 4.41: *Compresión no uniforme. Error global estimado y energía de deformación.*

En la figura 4.42 están los contornos de error local que se obtienen al final del cálculo, para cada una de las seis mallas analizadas. Dichos errores se han evaluado acumulando a lo largo del proceso de carga los valores incrementales obtenidos mediante la expresión (4.204). Puede comprobarse que el error local tienden a concentrarse según una diagonal, de manera análoga a lo que sucede con las deformaciones plásticas efectivas. Asimismo, los valores de dichos contornos decrecen según se va refinando la malla.

A continuación se analiza la evolución del error local de un elemento, a lo largo del proceso de carga. El elemento seleccionado ha sido el de la esquina superior derecha ya que, de acuerdo con las figuras 4.42 y 4.40, es el elemento con mayor nivel de deformación plástica y de error local al final del cálculo. De acuerdo con los dos sumandos de la expresión (4.204), el error local se puede descomponer aditivamente según las contribuciones de la energía libre elástica y de la energía correspondiente a la disipación plástica. Con este criterio, en las figuras (4.43) y (4.44), se recoge la evolución de ambas componentes del error, para cada una de las seis mallas analizadas. Interpretando estas figuras, las conclusiones más importantes que se extraen son las siguientes:

1. Tanto la componente elástica como la componente plástica del error local alcanzan valores menores al refinar la malla. No obstante, la componente plástica del error se activa antes con las mallas más finas.
2. Las dos componentes del error crecen a lo largo del proceso de carga.
3. El orden de magnitud de las dos componentes del error son similares. La componente plástica del error se activa antes en las mallas finas ya que se captura mejor el comienzo del flujo plástico. No obstante, la

variación del error local a lo largo del proceso es tanto menor cuanto más fina es la malla.

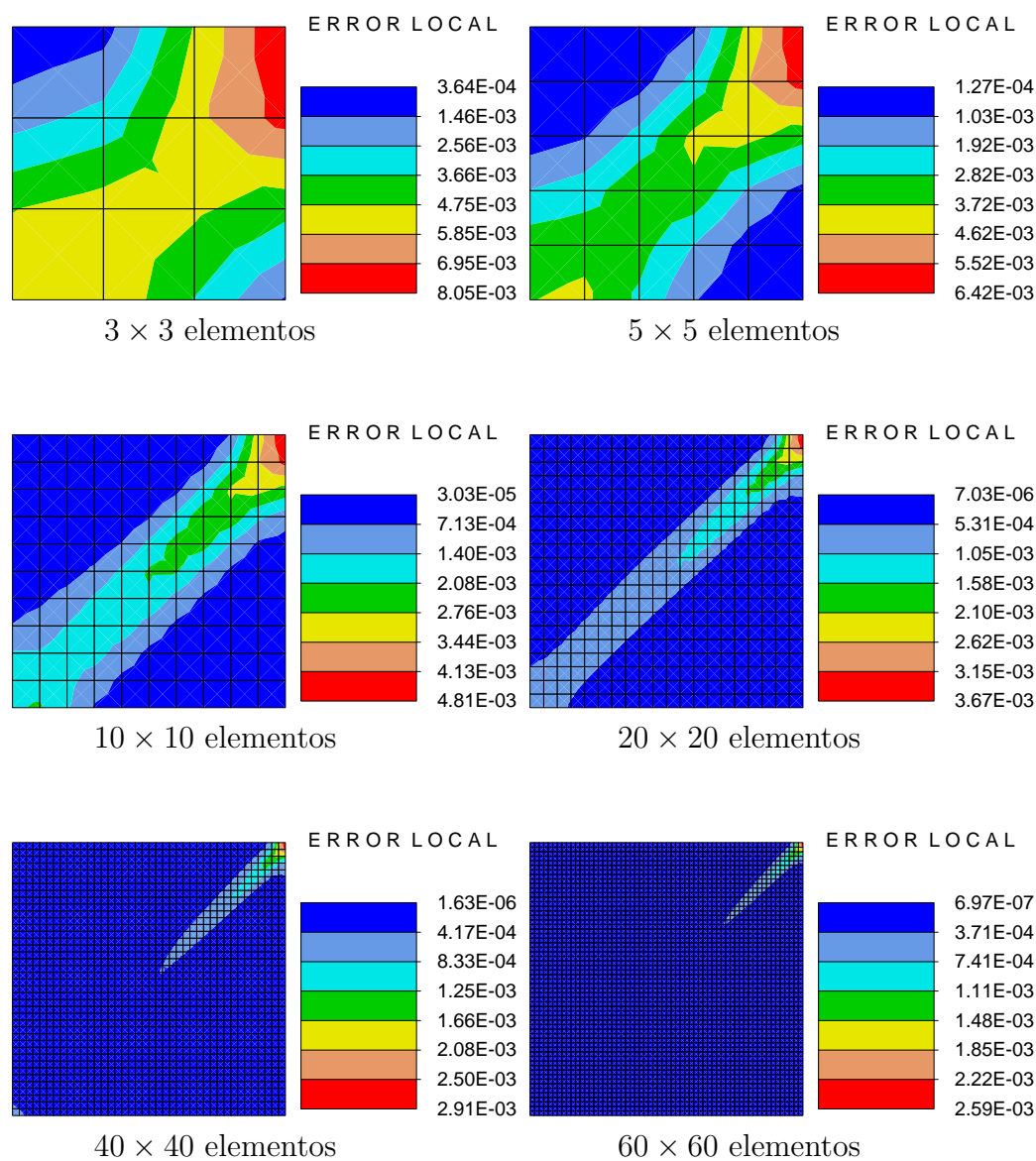


Figura 4.42: *Compresión no uniforme. Error local.*

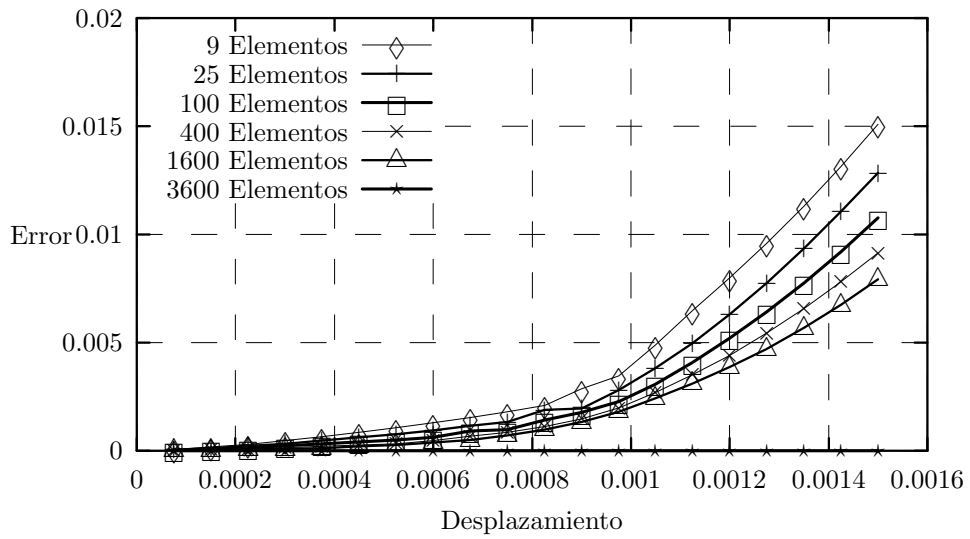


Figura 4.43: *Compresión no uniforme. Componente elástica del error local. Esquina superior derecha.*

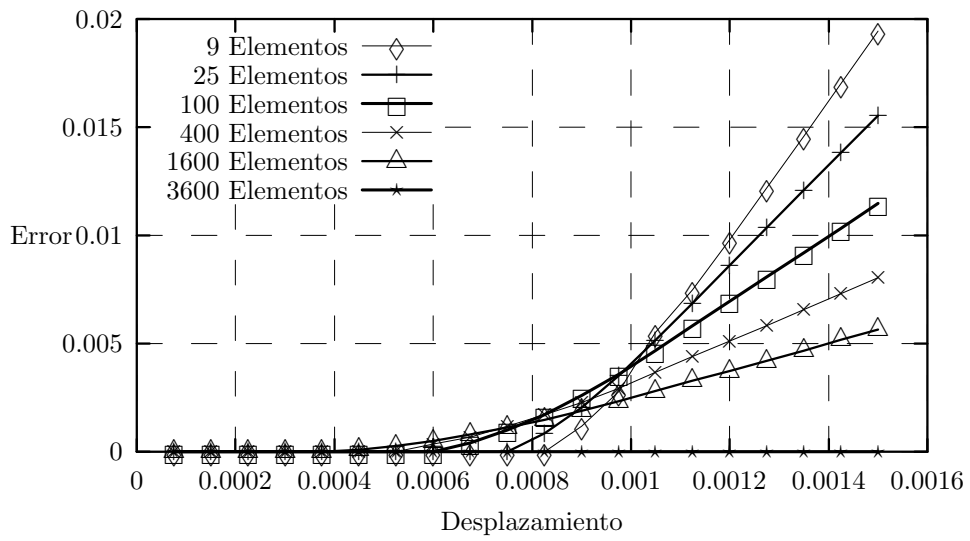


Figura 4.44: *Compresión no uniforme. Componente plástica del error local. Esquina superior derecha.*

Placa cuadrada con un taladro circular

Este ejemplo representa el ensayo de tracción de una placa cuadrada con un agujero circular, en condiciones de deformación plana. En este problema existen dos puntos singulares que están situados en los extremos del diámetro perpendicular a la dirección de los desplazamientos impuestos. Las dimensiones y condiciones de contorno se muestran en la figura 4.45, tomando $l = 100$, $r = 10$ y el desplazamiento impuesto final $u = 0,32$. Este ejemplo ha sido empleado como problema básico para la estimación de error en problemas no lineales, en el contexto de un proyecto de investigación de la Universidad de Hannover (Stein et al., 1997). Un resumen de los resultados obtenidos para este ejemplo se ha publicado en (Barthold et al., 1998). En este caso se considera un modelo elastoplástico de Von Mises con la ley de saturación (4.173), para la que se han tomado los siguientes valores:

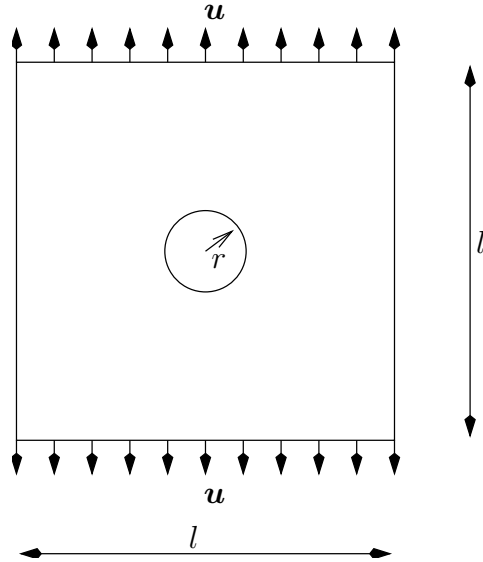


Figura 4.45: Tracción de una placa cuadrada con un taladro circular en deformación plana

$$Y_0 = 450,0$$

$$Y_\infty = 750,0$$

$$\beta = 16,93$$

$$H = 129,0$$

El comportamiento elástico queda definido por los valores:

$$E = 206900,0$$

$$\nu = 0,29$$

Para la estimación de error se han empleado las cuatro mallas que se muestran en la figura 4.46. Tienen 16, 192, 768 y 1536 elementos que corresponden, respectivamente a 37, 407, 1583 y 3119 grados de libertad.

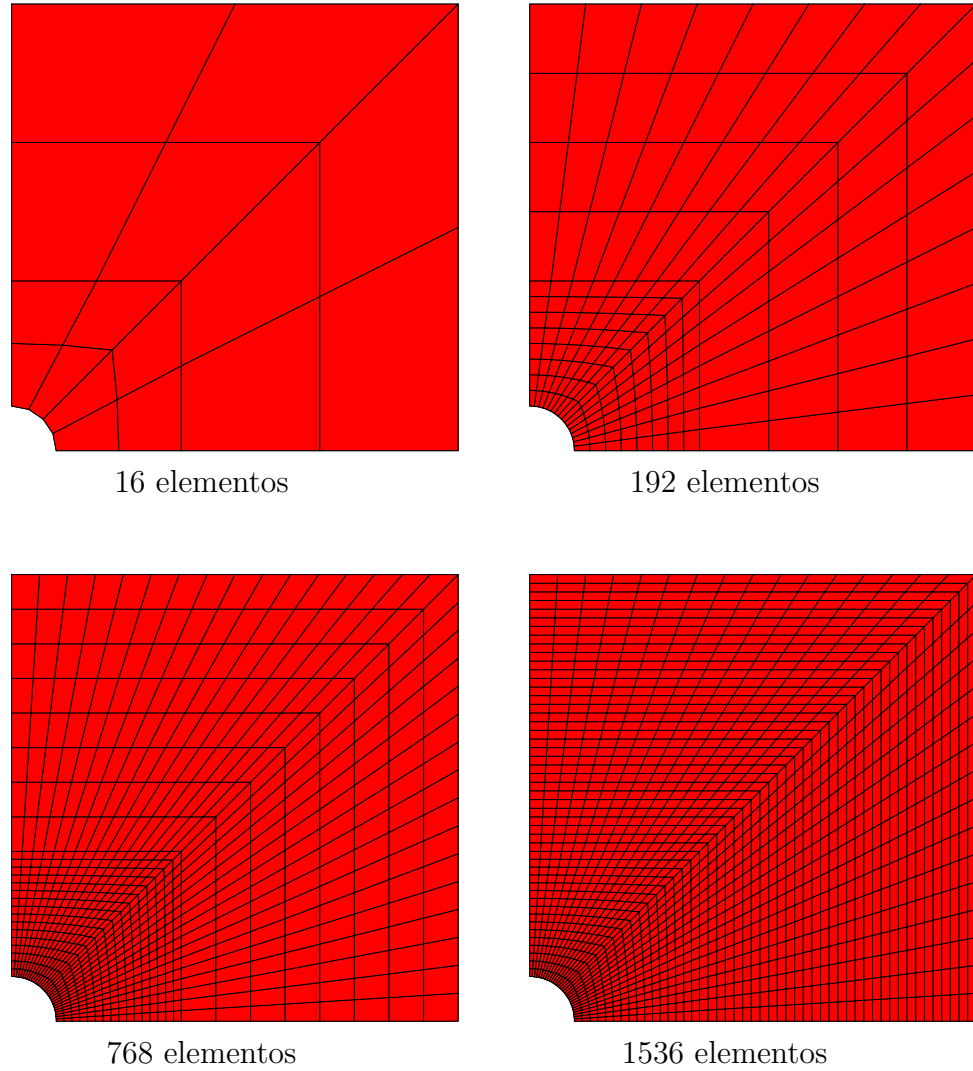


Figura 4.46: *Placa cuadrada con taladro circular. Mallas.*

En la figura 4.47 se muestran los contornos de deformación plástica efectiva que se obtienen con cada una de las mallas. Como puede observarse, según se van empleando mallas más finas, las deformaciones plásticas tienden a localizarse en una banda a 45° , que comienza a desarrollarse en el punto singular.

En la figura 4.48 se muestran las curvas de la energía interna total evaluada con los elementos mejorados y del error global estimado al final del cálculo, frente al número de grados de libertad. Es de destacar que el valor de la energía interna no cambia con el refinamiento de la malla. Este hecho se produce porque los valores de la energía elástica disminuyen con el número de grados de libertad, mientras que los de la energía irre recuperable aumentan. El resultado es que la suma de ambos términos es prácticamente constante con independencia del número de grados de libertad de la malla. Con los valores del error global estimado también se predice una tasa de convergencia relativamente baja: la recta de pendiente $1/8$ dibujada en escala doblemente

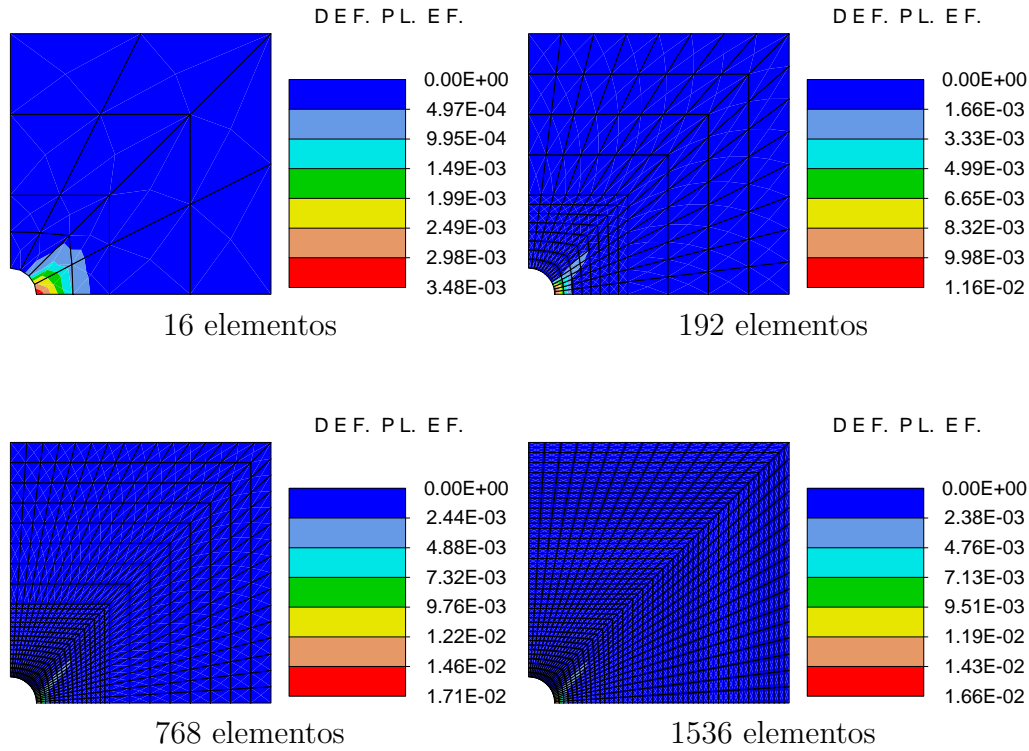


Figura 4.47: *Placa cuadrada con taladro circular. Deformación plástica efectiva.*

logarítmica se ajusta relativamente bien a la tasa de convergencia calculada.

La figura 4.49 recoge los contornos de error local al final del proceso de estiramiento. Estos valores se obtienen acumulando durante el proceso de carga los valores incrementales dados por la expresión (4.204). Dichos contornos alcanzan los valores máximos en el punto singular y también tienden a localizarse en una banda a 45° según se refina la malla.

Finalmente se analiza la evolución del error local del elemento que tiene un nodo en el punto singular (elemento de la esquina inferior del taladro). Para ello se descompone aditivamente en las contribuciones de la energía elástica y de la energía disipada, de acuerdo con la expresión 4.204. Las figuras 4.50 y 4.51 muestran la evolución en el tiempo de las dos componentes incrementales. Las conclusiones son similares a las de los ejemplos anteriores:

1. Ambas componentes del error local decrecen al refinar la malla, aunque la componente plástica del error se activa antes en las mallas más finas.
2. Las dos componentes son crecientes durante el proceso de carga.
3. El orden de magnitud de dichas componentes del error son similares.

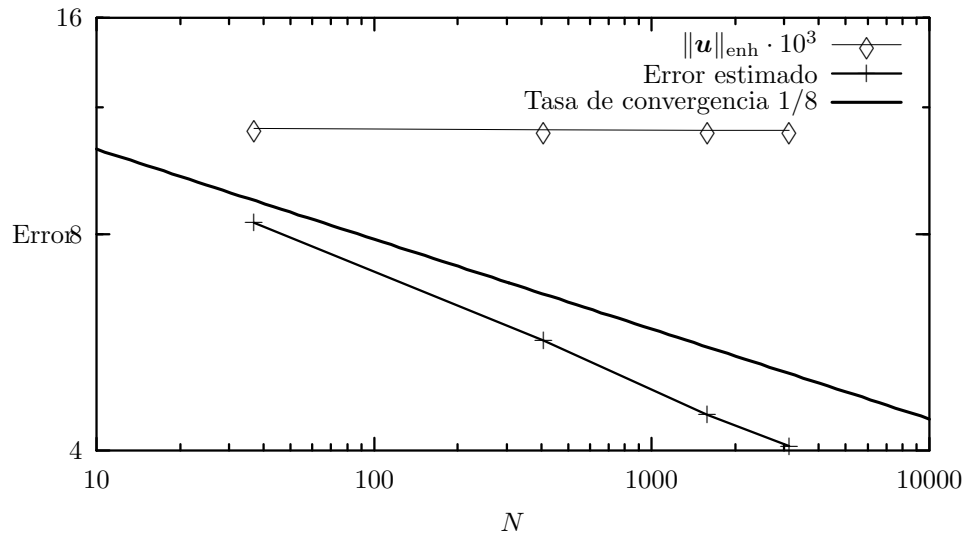


Figura 4.48: *Placa cuadrada con taladro circular. Error global estimado.*

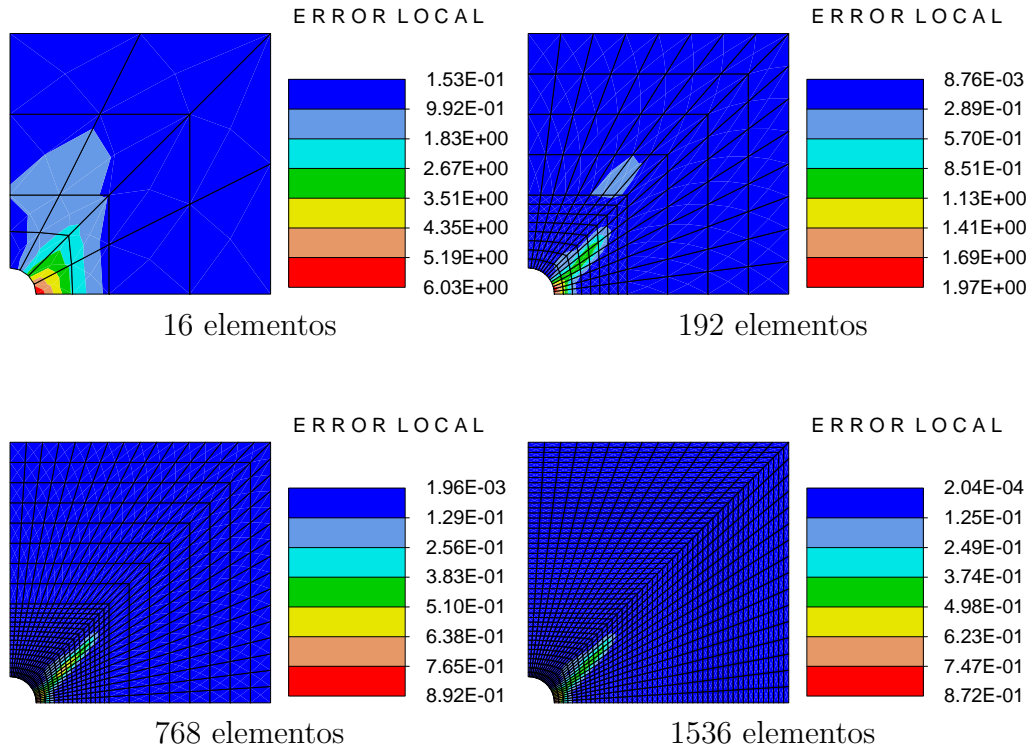


Figura 4.49: *Placa cuadrada con taladro circular. Error Local.*

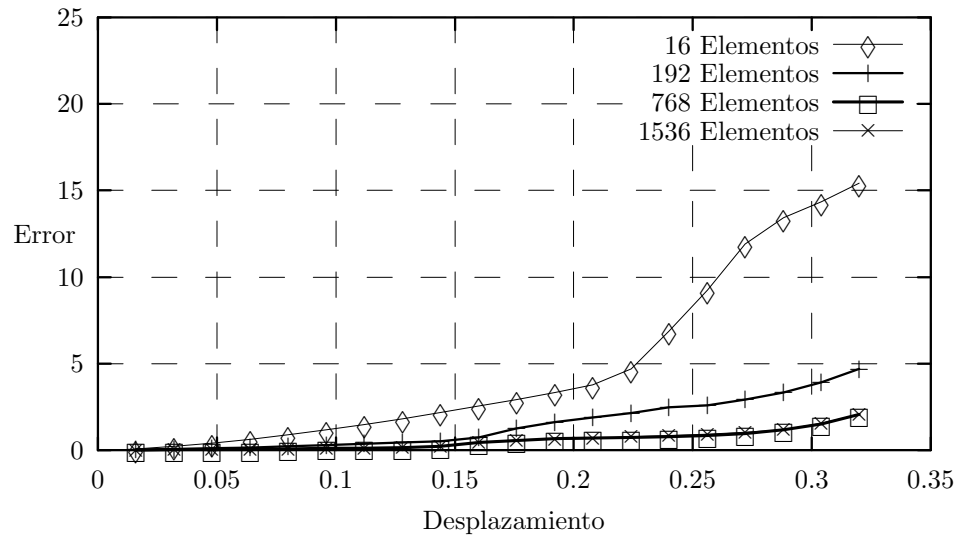


Figura 4.50: *Placa cuadrada con taladro circular. Evolución de la componente elástica del error local. Esquina inferior del taladro.*

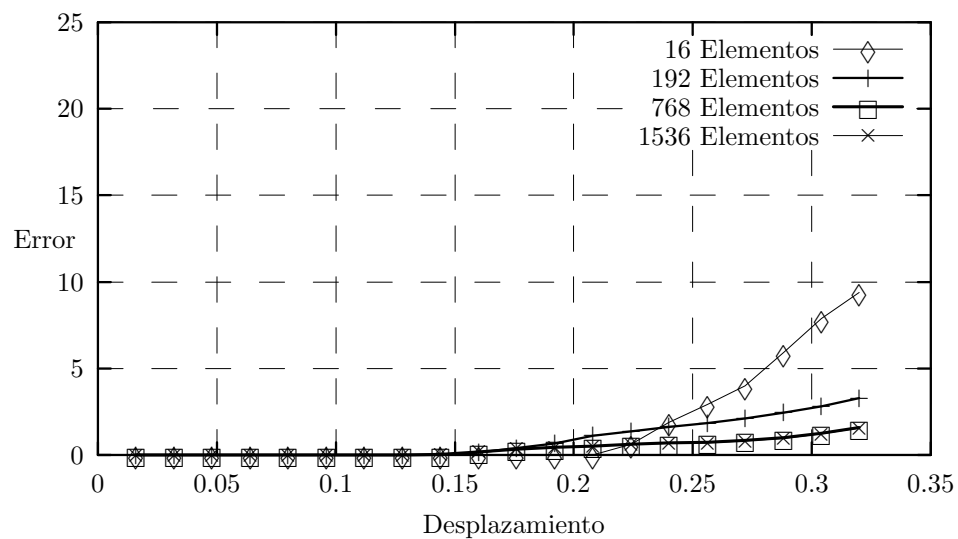


Figura 4.51: *Placa cuadrada con taladro circular. Evolución de la componente plástica del error local. Esquina inferior del taladro.*

4.6. Conclusiones

En este capítulo se ha desarrollado una metodología para la estimación de error. El estimador de error propuesto establece una cota del error de discretización de la solución aproximada mediante elementos formulados en desplazamientos, a partir de la solución obtenida con elementos de deformaciones supuestas (ver capítulo 2). La formulación del mismo está basada en la contribución energética de los modos mejorados de dichos elementos.

Una de las aportaciones de esta tesis es que el método de estimación de error es aplicable de manera general a problemas de:

- Elasticidad infinitesimal
- Elasticidad finita
- Plasticidad infinitesimal

En estos últimos se emplea un esquema de integración de las ecuaciones de la plasticidad que conserva la estructura variacional del problema de contorno. Presenta la ventaja de estar formulado de manera local, con lo cual su coste computacional es bajo y no es necesario establecer suavizados globales. Las condiciones para que dicho estimador presente un orden de convergencia adecuado son las siguientes:

1. La contribución energética de los modos incompatibles debe ser, al menos en régimen asintótico, decreciente según se refina la malla.
2. Al menos en régimen asintótico, la solución obtenida con los elementos de deformaciones supuestas ha de aproximarse “mejor” a la solución exacta, que la solución obtenida con elementos compatibles a la solución de elementos mejorados.

Capítulo 5

Aplicaciones: Localización

5.1. Resumen y Objetivos

En este capítulo se analizan diversos problemas de localización de deformaciones.

En primer lugar (apartado 5.2) se analiza la formación de bandas de localización en problemas con plasticidad de Von-Mises. Se entiende por *bandas de localización de deformaciones* el fenómeno de formación de bandas estrechas con elevados gradientes de deformación, que son precursoras de la fisuración o rotura del sólido. Se aplican los elementos mixtos con la formulación de deformaciones mejoradas supuestas (Simó y Armero, 1993; Simó et al., 1993a; Armero y Glaser, 1997) descritos en el capítulo 2. El estudio realizado investiga la capacidad de dichos elementos para representar la formación de bandas de localización, bajo diversos estados de tensión y deformación. No se estudia aquí, por el contrario, la objetividad de la respuesta de elementos finitos con respecto a la finura de la malla en problemas de localización. Es sabido, que la falta de objetividad de dicha solución respecto a la malla es un problema que puede ser resuelto mediante alguna técnica de regularización, aunque este aspecto no forma parte de los objetivos de esta tesis doctoral.

La metodología empleada supone que la formación de las bandas de localización está asociada a una discontinuidad débil, que se puede considerar precursora de la discontinuidad fuerte (Manzoli, 1998). Se evalúan, para distintas formulaciones de elementos, las prestaciones para capturar las bandas de localización con el criterio propuesto en (Steinmann y Willam, 1991; Steinmann y Willam, 1990). Este criterio se aplica de manera general mediante un estudio analíticamente exacto hecho con un código de álgebra formal (Maple, 1991a). A continuación se estudia la evolución del tensor acústico y la contribución de los modos de deformación de la matriz de rigidez en un ejemplo de localización modelizado con un sólo elemento (Simó y Armero, 1993), en el contexto de las grandes deformaciones. Finalmente, se modeliza el ensayo de tracción de una probeta en deformación plana con formación de bandas de localización, comparando las respuestas de distintas familias de elementos formulados para grandes deformaciones (Armero y Glaser, 1997).

En la segunda parte (apartado 5.3) se presentan distintos ejemplos de localización empleando el modelo constitutivo no asociativo de Drucker-Prager. En primer lugar se describe el modelo constitutivo empleado, mostrando algunas consecuencias prácticas de la falta de asociatividad. A continuación se tratan los fenómenos de localización en materiales cohesivos-friccionales. Se comienza con los ensayos de tracción, compresión y tracción-compresión de un elemento en deformación plana, analizando las distintas trayectorias de las tensiones a lo largo del proceso de carga. Finalmente se analizan los problemas de la estabilidad de un talud vertical, un talud inclinado 45° , y la carga de hundimiento de una zapata tanto en modelos de Von-Mises (considerando el suelo no drenado) como de Drucker-Prager. El capítulo finaliza con un apartado dedicado a las conclusiones.

5.2. Localización en materiales con plasticidad de Von-Mises

5.2.1. Introducción y Objetivos

La modelización numérica de las bandas de localización de deformaciones tiene el interés, desde el punto de vista ingenieril, de poder representar correctamente el fallo o la rotura de los medios sólidos en general. El tratamiento mediante elementos finitos de las bandas de localización presenta fundamentalmente dos problemas: la *cinemática* del elemento para capturar elevados gradientes de deformación, y la *regularización* para que la respuesta sea independiente del parámetro h de la malla empleada.

Actualmente, el análisis de las bandas de localización en sólidos se puede clasificar en tres grupos:

Métodos discretos. Estos métodos dividen la estructura en dos partes: una que es considerada como un medio continuo y otra en la que la discontinuidad se representa de forma discreta, mediante una ley fuerza-desplazamiento directamente relacionada con el concepto de energía de fractura. Estos métodos, que son muy empleados en el contexto de la mecánica de la fractura no lineal, presentan el inconveniente de necesitar criterios adicionales para determinar la dirección de propagación de la discontinuidad. Desde el punto de vista de la modelización mediante elementos finitos, los labios de la fisura se modelizan introduciendo contornos adicionales en la malla. Esta metodología presenta el inconveniente de tener que prever en la malla las superficies de discontinuidad, o en problemas complejos la necesidad de emplear sofisticadas técnicas de remallaje adaptativo ([Camacho et al., 1995](#)).

Métodos basados en la mecánica de medios continuos. En el contexto de la teoría clásica de la mecánica de medios continuos ([Hill, 1962](#); [Kravtchenko y Sirieysj, 1964](#); [Rice, 1976](#)), la banda de localización define

una discontinuidad (acotada) en el campo de deformaciones siendo continuo el campo de desplazamientos (*discontinuidad débil*). Con esta hipótesis el análisis se realiza asumiendo que la estructura es un medio continuo, empleando relaciones tensión-deformación, incluso en la discontinuidad. Dado que el ancho de la banda no está limitado en esta teoría, la solución más estable corresponde a un ancho nulo. Desde el punto de vista numérico, la dimensión de un elemento corresponde al mínimo ancho que puede tener la banda. Para que la solución no dependa del tamaño de la banda se han empleado diversos procedimientos que minimizan dicha dependencia. De estos procedimientos cabe destacar:

- Definición de una *longitud característica* que limita el máximo ancho de la banda, introduciendo gradientes de segundo orden de deformación (de Borst et al., 1993)
- Formulaciones no locales en las que el comportamiento no lineal en un punto depende de las deformaciones y/o variables internas en el propio punto y en otros puntos vecinos (Bažant y Pijaudier-Cabot, 1988)
- Técnicas de regularización viscoplástica (Needleman, 1988; Loret y Prevost, 1990; Prevost y Loret, 1990)
- Técnicas de regularización considerando un continuo micropolar de Cosserat (Mühlhaus y Vardoulakis, 1987).

En el contexto de esta metodología también se ha aplicado el remallaje adaptativo (Ortiz y Quigley, 1991; Zienkiewicz et al., 1995), y el enriquecimiento de las funciones de forma del elemento (Ortiz et al., 1987).

Métodos basados en la mecánica de medios discontinuos. Esta metodología combina de manera consistente la mecánica de medios continuos con los métodos discretos. La idea clave (Simó et al., 1993b) es que bajo ciertas hipótesis el modelo discreto se puede considerar como caso límite del modelo continuo para un ancho nulo de la banda de localización (*discontinuidad fuerte*). Para la modelización mediante elementos finitos, el campo de deformaciones en la banda se aproxima mediante funciones “Delta de Dirac”. Existen trabajos relevantes tanto en deformaciones infinitesimales (Simó y Oliver, 1994; Oliver et al., 1997; Manzoli, 1998) como en grandes deformaciones (Armero y Garikipati, 1996). La ventaja de esta aproximación es que interpreta la localización en el ámbito de la mecánica del medio continuo, con anchos de la banda nulos y disipación no nula. Asimismo, al incluirse modos de localización en la formulación del elemento se evitan problemas relacionados con el tamaño de la malla y la orientación de la misma.

En este capítulo se aplican los elementos mixtos con la formulación descrita en el capítulo 2, a problemas de localización de deformaciones. Los resultados que se presentan aquí se restringen al análisis de la cinemática del elemento, sin investigar las posibles técnicas de regularización de la respuesta.

La metodología empleada parte de la hipótesis de que la formación de la banda de localización está asociada a una discontinuidad débil, que se puede considerar precursora de la discontinuidad fuerte (Manzoli, 1998). Se evalúan, para distintas formulaciones de elementos, las prestaciones para capturar las bandas de localización integrando la condición de localización en el dominio del elemento. Este criterio (Steinmann y Willam, 1991; Steinmann y Willam, 1990), se generaliza en este trabajo haciendo un estudio analíticamente exacto mediante un código de álgebra formal (Maple, 1991a). A continuación se estudia el ejemplo de localización de un elemento con grandes deformaciones (Simó y Armero, 1993). En este ejemplo se analiza la evolución del determinante del tensor acústico y la contribución a la respuesta del elemento de los distintos modos de deformación de la matriz de rigidez. Finalmente se modeliza el ensayo de tracción con formación de bandas de localización, en deformación plana. Se compara la respuesta de distintas familias de elementos formulados en grandes deformaciones, y la influencia que tienen los diferentes ordenes de la cuadratura de Gauss, en los resultados obtenidos con los elementos mejorados.

5.2.2. Criterio de localización

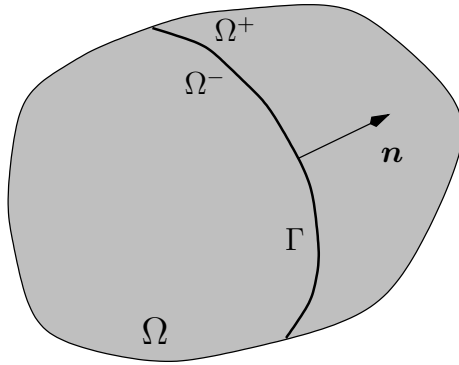


Figura 5.1: Definición de la banda

Sea un medio continuo definido por un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, en el que existe una banda de localización definida por la superficie $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Esta banda define dos subdominios de Ω que denominaremos Ω^+ y Ω^- . Los contornos de Ω^+ y Ω^- definidos por la banda Γ se denominan Γ^+ y Γ^- , respectivamente. Se define el operador $[[\cdot]]$ como la diferencia entre los valores que toma el campo (\cdot) en Γ^+ y Γ^- . Suponiendo que

el sólido está sometido a incrementos “pseudo-estáticos” de deformación, la continuidad del campo de desplazamientos a ambos lados de la banda Γ , se expresa:

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] = \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^- = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

La discontinuidad en el campo de deformaciones se establece también mediante la diferencia de las tasas del tensor de deformaciones infinitesimales:

$$[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^+ - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^- \neq \mathbf{0} \quad (5.2)$$

siendo $(\cdot)^+$ y $(\cdot)^-$ los valores del campo (\cdot) en Γ^+ y Γ^- respectivamente. Llamando \mathbf{m} a la dirección de localización y \mathbf{n} al versor normal a la banda de

localización, la condición de compatibilidad cinemática de Maxwell establece que:

$$[\![\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]\!] = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m})^s \quad (5.3)$$

donde \otimes es el operador producto tensorial y $(\cdot)^s$ es la parte simétrica del tensor (\cdot) .

Observación 5.2.1 *En el contexto de la mecánica de la fractura, la condición $\mathbf{m} \parallel \mathbf{n}$ equivale al modo I, y la condición $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$ equivale al modo II.*

Por otra parte, la condición de equilibrio en dirección normal a la banda es:

$$[\![\dot{\boldsymbol{\sigma}}]\!] \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

Expresando (5.4) mediante el tensor de módulos tangentes:

$$\mathbf{C}[\![\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]\!] \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

para lo que se ha supuesto que el estado de carga es el mismo en Γ^+ y Γ^- . Sustituyendo la condición de Maxwell (5.3) en (5.5), resulta finalmente:

$$\mathbf{Q} \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (5.6)$$

donde:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \mathbf{C} \mathbf{n} \quad (5.7)$$

es un tensor de segundo orden que se denomina *tensor acústico*. Para que la ecuación (5.6) tenga solución distinta de la trivial es necesario que:

$$\det(\mathbf{Q}) = 0 \quad (5.8)$$

La ecuación (5.8) es la que se adopta en este trabajo como condición de localización.

Observación 5.2.2 *En lo anterior se ha efectuado un planteamiento pseudo-estático de la localización débil. El planteamiento dinámico conduciría a la ecuación:*

$$\mathbf{Q} \mathbf{m} = \rho c^2 \mathbf{m} \quad (5.9)$$

donde ρ es la densidad del material y c es la velocidad de propagación de ondas. La ecuación (5.9) establece que la velocidad de propagación c es proporcional a los autovalores del tensor acústico. Por tanto, la condición de localización (5.8) se puede interpretar, desde el punto de vista dinámico, diciendo que la formación de la discontinuidad débil da lugar a valores nulos o imaginarios de la velocidad de propagación de las ondas.

Observación 5.2.3 *La condición $c = 0$ hace que se pierda la hiperbolicidad de la ecuación dinámica de Cauchy. Este hecho da lugar a que el problema de contorno esté matemáticamente mal planteado (es decir, la solución no es única) (Needleman, 1988).*

Observación 5.2.4 Si el material sobre la discontinuidad Γ se encuentra en estado elástico, el tensor \mathbf{C} es definido positivo y por tanto, no es posible que se verifique la condición (5.8)

5.2.3. Análisis de la localización en medios continuos

En este apartado se hace un análisis de la condición de localización expresada en (5.8) aplicada a medios continuos bajo las hipótesis de deformación plana y tensión plana, para distintos estados tensionales. Se considera el modelo constitutivo de plasticidad de Von-Mises (apéndice A) con endurecimiento isótropo tangente H . La relación tensión-deformación se expresa de manera incremental con el tensor tangente elastoplástico \mathbf{C}^{ep} :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{ep} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.10)$$

El comportamiento elástico se caracteriza mediante los coeficientes de Lamé λ y μ . Todos los resultados se obtienen analíticamente empleando un programa de cálculo formal (Maple, 1991a).

Deformación Plana

En el supuesto de estado de carga plástica, la restricción de incompresibilidad del flujo plástico impone que en direcciones principales, la expresión general del tensor de tensiones sea:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0,5(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

El tensor tangente elastoplástico (5.10), obtenido al particularizar A.27 (apéndice A) para deformación plana, se expresa¹:

$$\mathbf{C}^{ep} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu - \frac{2\mu^2(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{(\mu + H)(-\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2} & \lambda - \frac{\mu^2(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{(\mu + H)(-\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2} & 0 \\ \lambda - \frac{\mu^2(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{(\mu + H)(-\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2} & \lambda + 2\mu - \frac{2\mu^2(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})^2}{(\mu + H)(-\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Si las componentes del vector normal a la banda de localización son:

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta) \quad (5.13)$$

¹El tensor de cuarto orden \mathbf{C}^{ep} se ha transformado, a efectos de notación, en una matriz de segundo orden \mathbf{C}^{ep} con el proceso que se detalla en (Hughes, 1987). Entonces, los tensores $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ se deben expresar como vectores de dimensión n_{str}

sustituyendo (5.12; 5.13) en (5.7), las componentes del tensor acústico \mathbf{Q} resultan:

$$Q_{11} = \frac{\lambda \mu \cos^2 \theta + \lambda H \cos^2 \theta + \mu H \cos^2 \theta + \mu^2 + \mu H}{\mu + H} \quad (5.14)$$

$$Q_{12} = \frac{(\lambda \mu + \lambda H + 2 \mu^2 + \mu H) \sin \theta \cos \theta}{\mu + H} \quad (5.15)$$

$$Q_{22} = -\frac{\lambda(\mu + H) \sin^2 \theta + \mu H \sin^2 \theta + \mu(\mu + H)}{\mu + H} \quad (5.16)$$

Imponiendo la condición de localización (5.8) y despejando el módulo de endurecimiento, se obtiene:

$$H_{\text{crit}} = -\frac{\mu (2 \cos^2 \theta - 1)^2 (\lambda + \mu)}{\lambda + 2 \mu} \quad (5.17)$$

Observación 5.2.5 La ecuación (5.17) relaciona el valor del módulo de endurecimiento crítico para el que se desarrolla la banda de localización débil y la dirección del vector normal a dicha banda. En deformación plana, la expresión de H_{crit} es independiente del estado tensional.

Observación 5.2.6 De la expresión (5.17) se concluye que únicamente se pueden formar bandas de localización para valores nulos o negativos del módulo de endurecimiento H .

Tensión plana

La expresión del tensor de tensiones, referido a las direcciones principales, en el caso de tensión plana es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Realizando un desarrollo similar al anterior, a partir del tensor de módulos tangente elastoplástico, y expresando mediante (5.13) las componentes del vector normal a la banda, al despejar H de la ecuación (5.8), el módulo de endurecimiento crítico es:

$$H_{\text{crit}} = -\frac{\mu(2\mu + 3\lambda) (-2\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + 3(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos \theta)^2}{4 (\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2) (\mu + \lambda)} \quad (5.19)$$

Observación 5.2.7 En tensión plana, el módulo de endurecimiento crítico depende explícitamente de las tensiones principales.

Observación 5.2.8 *Al igual que en el caso de deformación plana, en tensión plana únicamente se pueden formar bandas de localización para valores nulos o negativos del módulo de endurecimiento H .*

Particularizando la expresión (5.19) para distintos estados de carga se obtienen los siguientes resultados:

1. *Extensión uniaxial.* Haciendo $\sigma_{xx} = 0$ ó $\sigma_{yy} = 0$ en (5.19), resulta:

$$H_{\text{crit}} = -\frac{1}{4} \frac{\mu (2\mu + 3\lambda) (3 \cos^2 \theta - 2)^2}{\mu + \lambda} \quad (5.20)$$

2. *Corte puro.* Sustituyendo en (5.19) $\sigma_{xx} = -\sigma_{yy}$, se obtiene:

$$H_{\text{crit}} = -\frac{3}{4} \frac{\mu (2\mu + 3\lambda) (2 \cos^2 \theta - 1)^2}{\lambda + \mu} \quad (5.21)$$

5.2.4. Análisis numérico de la localización

Estudiamos ahora las prestaciones de distintos tipos de elementos para capturar las bandas débiles de localización. La metodología seguida es una generalización de la propuesta en (Steinmann y Willam, 1990; Steinmann y Willam, 1991; Steinmann y Willam, 1994). En este trabajo el análisis se efectúa a partir de la matriz de rigidez tangente del elemento formulada analíticamente.

Como criterio de localización débil a nivel de elemento se establece de forma integral que la tasa de segundo orden de la energía interna (equivalente a las expresiones (5.3) y (5.5)) en el elemento es nula:

$$d^2 W_{\text{loc}} = \int_{\Omega_e} \llbracket \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rrbracket \cdot \llbracket \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rrbracket d\Omega = 0 \quad (5.22)$$

Con las hipótesis efectuadas en el apartado 5.2.2, la expresión (5.22) se reescribe en la forma:

$$d^2 W_{\text{loc}} = \int_{\Omega_e} \llbracket \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rrbracket \cdot \mathbf{C}^{ep} \llbracket \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rrbracket d\Omega = 0 \quad (5.23)$$

Desde el punto de vista del análisis mediante elementos finitos, al realizar la integral en el dominio Ω_e , la ecuación (5.23) puede expresarse en términos de la matriz de rigidez tangente del elemento y de la tasa del vector de desplazamientos nodales, resultando:

$$d^2 W_{\text{loc}} = \dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}^{\text{T}} \cdot \mathbf{K}^e \dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}^e = 0 \quad (5.24)$$

El vector de velocidades nodales $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$ que expresa la cinemática de la localización débil se obtiene integrando el salto del campo de deformaciones

expresado en (5.2). Expresando (5.3) en forma indicial junto con la hipótesis (5.1):

$$\dot{u}_{i,j}^+ - \dot{u}_{i,j}^- = \gamma m_i n_j \quad (5.25)$$

$$\dot{u}_i^+ - \dot{u}_i^- = 0 \quad \text{en } x_j n_j = 0 \quad (5.26)$$

Considerando un elemento de cuatro nodos cuyas coordenadas nodales son (x_i, y_i) (ver figura 5.2), y llamando (n_1, n_2) y (m_1, m_2) a las componentes de \mathbf{n} y \mathbf{m} respectivamente, al integrar las ecuaciones (5.25; 5.26) se obtiene el vector de velocidades nodales asociado al movimiento de localización (Steinmann y Willam, 1991):

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_1(n_1 x_3 + n_2 y_3) \\ m_2(n_1 x_3 + n_2 y_3) \\ m_1(-n_1 x_4 + n_2 y_4) \\ m_2(-n_1 x_4 + n_2 y_4) \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

donde se ha supuesto sin pérdida de generalidad que $\dot{\mathbf{u}}^- = \mathbf{0}$ en Ω_e^- . La condición de localización (5.24) se aplica a las siguientes familias de elementos de cuatro nodos:

1. Elemento con formulación en desplazamientos ($Q4$)
2. Elemento con integración reducida ($Q4R$)
3. Elemento con integración reducida selectiva ($Q4RS$), en deformación plana
4. Elemento \overline{B}
5. Elemento con formulación de deformaciones supuestas ($Q1/E4$)

La metodología seguida para comprobar si estos elementos verifican (5.24) consta de los seis pasos siguientes:

1. Para un determinado estado tensional y una dirección genérica de la banda de localización caracterizada por el vector $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$, se resuelve (5.8) obteniendo:

$$H_{\text{crit}} = H_{\text{crit}}(\theta) \quad (5.28)$$

2. Sustituyendo (5.28) en (5.6) y resolviendo, se obtiene el vector de polarización:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(\theta) \quad (5.29)$$

3. Con el resultado (5.28), obtenido en el contexto de la mecánica de medios continuos, ya a nivel numérico se formula la matriz de rigidez tangente del elemento:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}^e(\theta) \quad (5.30)$$

4. También a nivel de elemento, sustituyendo en (5.27) la expresión $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ y el vector $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\theta)$ calculado con (5.29), resulta la expresión genérica de $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}^e$ en términos del ángulo θ
5. Con el vector $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}^e = \dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}^e(\theta)$ obtenido en el paso anterior, se resuelve la ecuación (5.24) y se obtienen los valores de θ que indican las direcciones de la banda susceptibles de ser capturadas por el elemento.
6. Finalmente, se particulariza la matriz de rigidez del elemento para las direcciones calculadas en el punto anterior (definidas con el ángulo θ), y se efectúa un análisis espectral con objeto de conocer si el elemento es capaz de capturar la banda.

Observación 5.2.9 Si el vector $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$ se expresa como combinación lineal de los autovectores de la matriz de rigidez tangente, para que $d^2W_{\text{loc}} = 0$, los autovalores asociados a dichos autovectores han de ser nulos. Si esta condición de localización se verifica con autovalores no nulos, al menos uno de ellos ha de ser negativo, apareciendo situaciones de inestabilidad numérica en la matriz de rigidez.

Deformación plana

Se consideran los siguientes estados tensionales:

1. Corte puro
2. Extensión uniaxial

Los valores que se adoptan para los coeficientes de Lamé corresponden a los empleados en (Steinmann y Willam, 1991; Steinmann y Willam, 1990) y valen:

$$\lambda = 17307,69231 \quad \mu = 11538,46154 \quad (5.31)$$

El vector de polarización \mathbf{m} y el vector $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$ son independientes del estado tensional. Llamando $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ y calculando la expresión del tensor acústico con el módulo de endurecimiento crítico (5.17), al resolver la ecuación (5.6) la dirección de polarización resulta:

$$\mathbf{m} = \left(-\frac{(2(\lambda + \mu) \cos^2 \theta - 3\mu - 2\lambda) \cos \theta \sin \theta}{2(\lambda + \mu) \cos^4 \theta - (\mu + 2\lambda) \cos^2 \theta - \mu}, 1 \right) \quad (5.32)$$

El vector de velocidades nodales correspondiente al movimiento de localización, para el elemento biunitario, se obtiene sustituyendo (5.13) y (5.32) en

(5.27):

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{((2\mu+2\lambda)\cos^2\theta-2\lambda-3\mu)\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{(2\mu+2\lambda)\cos^4\theta-(2\lambda+\mu)\cos^2\theta-\mu} \\ \cos\theta+\sin\theta \\ -\frac{((2\mu+2\lambda)\cos^2\theta-2\lambda-3\mu)\cos\theta\sin\theta(-\cos\theta+\sin\theta)}{(2\mu+2\lambda)\cos^4\theta-(2\lambda+\mu)\cos^2\theta-\mu} \\ -\cos\theta+\sin\theta \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Los modos de deformación de la matriz de rigidez tangente que se obtendrán en los análisis de autovalores se muestran en la figura 5.3. A continuación se describen los resultados obtenidos para cada uno de los estados tensionales anteriormente referidos.

Corte puro.- En el estado de corte, la tasa del tensor de tensiones es

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con la expresión analítica de la matriz de rigidez tangente del elemento se evalúa d^2W_{loc} en función del ángulo θ mediante (5.24). En la figura 5.4 se representa la curva d^2W_{loc} frente al ángulo θ .

De acuerdo con estas curvas, los valores del ángulo θ que anulan d^2W_{loc} se recogen en el cuadro 5.1.

$Q4$	—	—	—	90°
$Q4SR$	—	—	—	90°
\bar{B}	$\pm 13,8^\circ$	—	$\pm 76,2^\circ$	90°
$Q1/E4$	—	$\pm 45^\circ$	—	—

Cuadro 5.1: Estado tensional de corte en deformación plana. Direcciones que anulan d^2W_{loc}

Observación 5.2.10 Con el elemento de integración reducida, d^2W_{loc} se anula para todos los valores de θ . No obstante, este elemento presenta modos de energía nula que dan lugar a resultados incorrectos. Esta observación debe tenerse en cuenta para los resultados que se obtendrán en lo sucesivo.

Para cada elemento y valor del ángulo θ recogidos en el cuadro 5.1 se ha realizado un análisis espectral de la matriz de rigidez tangente. Los resultados obtenidos se muestran en el cuadro 5.2.

θ	TR1	TR2	ROT	VOL	SHR	STR	BG1	BG2
90°	0	0	0	$2(\lambda + \mu)$	2μ	$-2(\lambda + \mu)$	$\mu/3$	$\mu/3$

$Q4$

θ	TR1	TR2	ROT	VOL	SHR	STR	BG1	BG2
90°	0	0	0	$2(\lambda + \mu)$	2μ	$-2(\lambda + \mu)$	μ	μ

$Q4RS$

θ	TR1	TR2	ROT	VOL	SHR	STR	BG1	BG2
$\pm 13,8^\circ$	0	0	0	$2(\lambda + \mu)$	2μ	$-29487,18$	$,81 \cdot 10^{-2}$	$,81 \cdot 10^{-2}$
$\pm 76,2^\circ$	0	0	0	$2(\lambda + \mu)$	2μ	$-29487,18$	$-,78 \cdot 10^{-4}$	$-,78 \cdot 10^{-4}$
90°	0	0	0	$2(\lambda + \mu)$	2μ	$-2(\lambda + \mu)$	$(\mu - 8\lambda)/27$	$(\mu - 8\lambda)/27$

\overline{B}

θ	TR1	TR2	ROT	VOL	SHR	STR	BG1	BG2
$\pm 45^\circ$	0	0	0	$2(\lambda + \mu)$	2μ	0	0	0

$Q1/E4$

Cuadro 5.2: *Análisis espectral de la matriz de rigidez. Estado tensional de corte en deformación plana*

Expresando el vector de velocidades nodales correspondiente al movimiento de localización (5.33) como combinación lineal de los autovectores de la matriz de rigidez tangente, se obtienen los siguientes resultados:

1. Elemento $Q4$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}} \in \{\mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}\}$$

El autovalor asociado al modo \mathbf{d}_{STR} es negativo, y por tanto, el elemento $Q4$ no captura la banda.

2. Elemento $Q4SR$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}} \in \{\mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}\}$$

Con este elemento sucede exactamente lo mismo que con $Q4$.

3. Elemento \overline{B}

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(\pm 13,8^\circ) \in \{\mathbf{d}_{\text{TR1}}, \mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{ROT}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{SHR}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}, \mathbf{d}_{\text{BG1}}, \mathbf{d}_{\text{BG2}}\}$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(\pm 76,2^\circ) \in \{\mathbf{d}_{\text{TR1}}, \mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{ROT}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{SHR}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}, \mathbf{d}_{\text{BG1}}, \mathbf{d}_{\text{BG2}}\}$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(90^\circ) \in \{\mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}\}$$

El modo \mathbf{d}_{STR} , asociado a un autovalor negativo, está contenido en todos los casos en el subespacio generador de $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$ y por lo tanto, para las tres direcciones consideradas, el elemento \overline{B} no captura las bandas.

4. Elemento $Q1/E4$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}} \in \{\mathbf{d}_{\text{TR1}}, \mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{ROT}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}, \mathbf{d}_{\text{BG1}}, \mathbf{d}_{\text{BG2}}\}$$

En este caso, los autovalores correspondientes a los modos del subespacio asociado a $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$ son nulos: *el elemento $Q1/E4$ captura las bandas de localización.*

En la figura 5.5 se muestra la dirección de la banda de localización, el vector de polarización y el vector de velocidades nodales, que únicamente es capturada por el elemento $Q1/E4$ en el estado tensional de corte.

Extensión simple.- La tasa del tensor de tensiones, correspondiente al estado de extensión simple en deformación plana, es:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\sigma}/2 \end{pmatrix}$$

donde el término $\dot{\sigma}_{33} = \dot{\sigma}/2$ impone la incompresibilidad del flujo plástico.

La expresión analítica de la matriz de rigidez tangente del elemento permite calcular d^2W_{loc} en función de θ mediante (5.24). En la figura 5.6 se representa la curva d^2W_{loc} frente al ángulo θ , para las formulaciones de elementos consideradas. De acuerdo con estas curvas, los valores para los que se anula d^2W_{loc} se muestran en el cuadro 5.3.

$Q4$	—	—	—	90°
$Q4SR$	—	—	—	90°
\overline{B}	$\pm 13,8^\circ$	—	$\pm 76,2^\circ$	90°
$Q1/E4$	—	$\pm 45^\circ$	—	—

Cuadro 5.3: *Extensión uniaxial en deformación plana. Direcciones que anulan d^2W_{loc}*

Para cada elemento y valor del ángulo θ recogidos en el cuadro 5.1 se ha realizado un análisis espectral de la matriz de rigidez tangente. Los resultados obtenidos se muestran en el cuadro 5.4. Expresando el vector de velocidades nodales correspondiente al movimiento de localización (5.33) como combinación lineal de los autovectores de la matriz de rigidez tangente, se obtienen los siguientes resultados:

θ	TR1	TR2	ROT	VOL	SHR	STR	BG1	BG2
90°	0	0	0	$2(\lambda + \mu)$	2μ	$-2(\lambda + \mu)$	$\mu/3$	$\mu/3$

$Q4$

θ	TR1	TR2	ROT	VOL	SHR	STR	BG1	BG2
90°	0	0	0	$2(\lambda + \mu)$	2μ	$-2(\lambda + \mu)$	μ	μ

$Q4RS$

θ	TR1	TR2	ROT	VOL	SHR	STR	BG1	BG2
$\pm 13,8^\circ$	0	0	0	$2(\lambda + \mu)$	2μ	$-29487,18$	$,81 \cdot 10^{-2}$	$,81 \cdot 10^{-2}$
$\pm 76,2^\circ$	0	0	0	$2(\lambda + \mu)$	2μ	$-29487,18$	$-,78 \cdot 10^{-4}$	$-,78 \cdot 10^{-4}$
90°	0	0	0	$2(\lambda + \mu)$	2μ	$-2(\lambda + \mu)$	$(\mu - 8\lambda)/27$	$(\mu - 8\lambda)/27$

\bar{B}

θ	TR1	TR2	ROT	VOL	SHR	STR	BG1	BG2
$\pm 45^\circ$	0	0	0	$2(\lambda + \mu)$	2μ	0	0	0

$Q1/E4$

Cuadro 5.4: *Análisis espectral de la matriz de rigidez. Extensión uniaxial en deformación plana*

1. Elemento $Q4$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}} \in \{\mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}\}$$

El autovalor asociado al modo \mathbf{d}_{STR} es negativo, y por tanto el elemento $Q4$ no captura la banda.

2. Elemento $Q4SR$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}} \in \{\mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}\}$$

En este elemento sucede exactamente lo mismo que con el $Q4$. Para el elemento $Q4SR$ el autovalor asociado a \mathbf{d}_{STR} es igualmente negativo, y el elemento no captura la banda de localización.

3. Elemento \bar{B}

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(\pm 13,8^\circ) \in \{\mathbf{d}_{\text{TR1}}, \mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{ROT}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{SHR}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}, \mathbf{d}_{\text{BG1}}, \mathbf{d}_{\text{BG2}}\}$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(\pm 76,2^\circ) \in \{\mathbf{d}_{\text{TR1}}, \mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{ROT}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{SHR}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}, \mathbf{d}_{\text{BG1}}, \mathbf{d}_{\text{BG2}}\}$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(90^\circ) \in \{\mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}\}$$

El modo \mathbf{d}_{STR} , asociado a un autovalor negativo, está contenido en todos los casos en la combinación lineal de $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$ y por lo tanto, para todos los ángulos, el elemento \bar{B} no captura las bandas.

4. Elemento $Q1/E4$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}} \in \{\mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}\}$$

En este caso, los autovalores correspondientes a los modos del subespacio asociado a $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$ son nulos: *el elemento $Q1/E4$ captura las bandas de localización.*

En la figura 5.5 se muestra la dirección de la banda de localización, el vector de polarización y el vector de velocidades nodales, que únicamente es capturada por el elemento $Q1/E4$ en el estado de extensión simple.

Tensión Plana

En tensión plana se analizan los siguientes estados tensionales:

1. Corte puro
2. Extensión uniaxial
3. Extensión equibiaxial

Los valores que se adoptan para los coeficientes de Lamé son los ya expresados en 5.31. Para los estados tensionales de extensión algunos autovectores de la matriz de rigidez difieren de los obtenidos anteriormente. En la figura 5.7 se muestran los autovectores que se obtienen para dichos estados tensionales.

Corte puro.- En tensión plana, la expresión de la tasa del tensor de tensiones en direcciones principales es la misma que en deformación plana:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El módulo de endurecimiento crítico viene dado por la expresión (5.21). La dirección de polarización es:

$$\mathbf{m} = \left(\frac{(6\lambda \cos^2 \theta - 7\lambda + 4\mu \cos^2 \theta - 6\mu) \cos \theta}{\sin \theta (4\mu \cos^2 \theta + 6\lambda \cos^2 \theta + \lambda + 2\mu)}, 1 \right) \quad (5.34)$$

Para el elemento biunitario, el vector de velocidades correspondiente al movimiento de localización se obtiene operando en (5.27) y resulta:

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}^{\epsilon T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{((6\lambda+4\mu) \cos^2 \theta - 7\lambda - 6\mu) \cos \theta (\cos \theta + \sin \theta)}{\sin \theta ((6\lambda+4\mu) \cos^2 \theta + \lambda + 2\mu)} \\ \cos \theta + \sin \theta \\ - \frac{((6\lambda+4\mu) \cos^2 \theta - 7\lambda - 6\mu) \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta)}{\sin \theta ((6\lambda+4\mu) \cos^2 \theta + \lambda + 2\mu)} \\ - \cos \theta + \sin \theta \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

En la figura 5.8 se muestra el valor de d^2W_{loc} frente al ángulo θ . De la curva analítica $d^2W_{\text{loc}} = d^2W_{\text{loc}}(\theta)$ se obtienen las direcciones de la banda que posiblemente captura cada elemento. Dichas direcciones se recogen en el cuadro 5.5.

$Q4$	—	—	—	90°
\bar{B}	$\pm 11,7^\circ$	—	$\pm 78,3^\circ$	90°
$Q1/E4$	—	$\pm 45^\circ$	—	—

Cuadro 5.5: *Estado tensional de corte en tensión plana. Direcciones que anulan d^2W_{loc}*

Para verificar si los elementos capturan la banda de localización es necesario hacer un análisis espectral de las correspondientes matrices de rigidez elementales. El vector (5.35) se expresa como combinación lineal de los autovectores obtenidos en el análisis espectral, debiendo ser nulos los autovalores asociados a dichos autovectores. En el cuadro 5.6, se muestran los autovalores obtenidos para cada elemento y cada ángulo del cuadro 5.5.

θ	TR1	TR2	ROT	VOL	SHR	STR	BG1	BG2
90°	0	0	0	$2\mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}$	2μ	$-2\mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}$	$\frac{\mu}{3}$	$\frac{\mu}{3}$

$Q4$

θ	TR1	TR2	ROT	VOL	SHR	STR	BG1	BG2
$\pm 11,7^\circ$	0	0	0	$2\mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}$	2μ	-27838,83	-47 10-3	-47 10-3
$\pm 78,3^\circ$	0	0	0	$2\mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}$	2μ	-27838,83	-24 10-3	-24 10-3
90°	0	0	0	$2\mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}$	2μ	$-2\mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}$	$\mu \frac{2\mu-15\lambda}{27(\lambda+2\mu)}$	$\mu \frac{2\mu-15\lambda}{27(\lambda+2\mu)}$

\bar{B}

θ	TR1	TR2	ROT	VOL	SHR	STR	BG1	BG2
$\pm 45^\circ$	0	0	0	$2\mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}$	2μ	0	0	0

$Q1/E4$

Cuadro 5.6: *Análisis espectral de la matriz de rigidez. Estado de corte. Tensión plana*

Para cada valor del ángulo θ se obtiene un vector de localización $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$ sin más que sustituir en (5.35). Expresando $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$ como combinación lineal de los autovectores de las matrices de rigidez correspondientes, para cada elemento se obtienen las siguientes conclusiones:

1. Elemento $Q4$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}} \in \{\mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}\}$$

El autovalor asociado al modo \mathbf{d}_{STR} es negativo, por lo que el elemento es inestable para capturar la banda de localización.

2. Elemento \overline{B}

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(11,7^\circ) \in \{\mathbf{d}_{\text{TR1}}, \mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{ROT}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{SHR}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}, \mathbf{d}_{\text{BG1}}, \mathbf{d}_{\text{BG2}}\}$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(78,3^\circ) \in \{\mathbf{d}_{\text{TR1}}, \mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{ROT}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{SHR}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}, \mathbf{d}_{\text{BG1}}, \mathbf{d}_{\text{BG2}}\}$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(90^\circ) \in \{\mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}\}$$

Para las tres orientaciones que se deben considerar, el modo \mathbf{d}_{STR} , que está asociado a un autovalor negativo, está contenido en el subespacio que contiene a $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$. Por tanto este elemento tampoco captura las bandas.

3. Elemento $Q1/E4$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}} \in \{\mathbf{d}_{\text{TR1}}, \mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{ROT}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}, \mathbf{d}_{\text{BG1}}, \mathbf{d}_{\text{BG2}}\}$$

Con este elemento, los autovalores asociados a los modos del subespacio en el que está contenido $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$ son nulos. De aquí se concluye que el elemento captura las bandas para $\theta = \pm 45^\circ$. En la figura 5.5 se muestra el vector $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$ para la banda a $+45^\circ$.

Extensión uniaxial.- En este caso la tasa del tensor de tensiones es:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la expresión del módulo de endurecimiento crítico es (5.20). La dirección de polarización viene dada por:

$$\mathbf{m} = \left(\frac{((9\lambda + 6\mu) \cos^2 \theta - 9\lambda - 8\mu) \cos \theta}{\sin \theta ((9\lambda + 6\mu) \cos^2 \theta + 3\lambda + 4\mu)}, 1 \right) \quad (5.36)$$

siendo θ el ángulo que forma la normal a la banda con el eje x . Considerando un elemento biunitario, el vector de velocidades nodales para el movimiento de localización se obtiene sustituyendo (5.13) y (5.36) en (5.27), resultando:

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}^{\text{eT}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{((9\lambda+6\mu) \cos^2 \theta - 9\lambda - 8\mu) \cos \theta (\cos \theta + \sin \theta)}{\sin \theta ((9\lambda+6\mu) \cos^2 \theta + 3\lambda + 4\mu)} \\ \cos \theta + \sin \theta \\ - \frac{((9\lambda+6\mu) \cos^2 \theta - 9\lambda - 8\mu) \cos \theta (\cos \theta - \sin \theta)}{\sin \theta ((9\lambda+6\mu) \cos^2 \theta + 3\lambda + 4\mu)} \\ - \cos \theta + \sin \theta \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

A continuación se obtiene la expresión analítica de la matriz de rigidez para cada tipo de elemento. Con estas expresiones se opera en (5.24) y se obtienen las expresiones de $d^2W_{\text{loc}} = d^2W_{\text{loc}}(\theta)$. En la figura (5.9) se representan estas curvas para cada uno de los elementos considerados.

Resolviendo $d^2W_{\text{loc}}(\theta) = 0$ se obtienen las posibles direcciones de la banda de localización que cada elemento es susceptible de capturar. Dichas direcciones se muestran en el cuadro 5.7.

$Q4$	$\pm 24,2^\circ$	—	—	—	90°
\overline{B}	—	$\pm 25,1^\circ$	—	—	90°
$Q1/E4$	—	—	$\pm 29,5^\circ$	$\pm 54,7^\circ$	90°

Cuadro 5.7: *Extensión uniaxial en tensión plana. Direcciones que anulan d^2W_{loc}*

Para estos valores del ángulo θ , es necesario realizar un análisis espectral de las matrices de rigidez. Los resultados de dicho análisis se recogen en el cuadro 5.8².

Por último, es necesario expresar el vector $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$ (5.37) como combinación lineal de los autovectores de la matriz de rigidez tangente, para comprobar que los autovalores correspondientes a dichos autovectores no son negativos. Para los elementos y orientaciones de la banda de localización recogidos en el cuadro 5.7, el sistema generador de $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$ es:

1. Elemento $Q4$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(\pm 24,2^\circ) &\in \{\mathbf{d}_{\text{TR1}}, \mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{ROT}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{SHR}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}, \mathbf{d}_{\text{BG1}}, \mathbf{d}_{\text{BG2}}\} \\ \dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(90^\circ) &\in \{\mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}, \}\end{aligned}$$

El autovector \mathbf{d}_{STR} , asociado a autovalores negativos para ambas direcciones, está contenido en el subespacio generador de la dirección de localización. Por tanto, el elemento no captura las bandas de localización.

2. Elemento \overline{B}

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(\pm 25,1^\circ) &\in \{\mathbf{d}_{\text{TR1}}, \mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{ROT}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{SHR}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}, \mathbf{d}_{\text{BG1}}, \mathbf{d}_{\text{BG2}}\} \\ \dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(90^\circ) &\in \{\mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}, \}\end{aligned}$$

La situación descrita para el elemento $Q4$ es igualmente válida para el elemento \overline{B} .

²Para $\theta = 90^\circ$, la matriz de rigidez del elemento $Q1/E4$ tiene términos que tienden a $\pm\infty$, por lo que no es posible efectuar el análisis espectral

3. Elemento $Q1/E4$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(\pm 29,5^\circ) \in \{\mathbf{d}_{\text{TR1}}, \mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{ROT}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{SHR}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}, \mathbf{d}_{\text{BG1}}, \mathbf{d}_{\text{BG2}}\}$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}(54,7^\circ) \in \{\mathbf{d}_{\text{TR1}}, \mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{ROT}}, \mathbf{d}_{\text{STR}}, \mathbf{d}_{\text{BG1}}, \mathbf{d}_{\text{BG2}}\}$$

Para $\theta = 29,5^\circ$, el elemento $Q1/E4$ no captura la banda por lo ya comentado. Sin embargo, para $\theta = 54,7^\circ$ todos los autovalores correspondientes a los autovectores asociados al vector $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$, son nulos. Por tanto, el elemento $Q1/E4$ captura la banda de localización a $\theta = 54,7^\circ$.

El vector de velocidades nodales correspondiente al movimiento de localización es en este caso:

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}} = (0, 0, 0, 0, -1 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$$

En la figura 5.10 se muestra el vector de polarización y el vector de velocidades nodales, para la banda a $+54,7^\circ$.

Extensión equibiaxial En este caso la tasa del tensor de tensiones es:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la expresión del módulo de endurecimiento crítico es (5.20). La dirección de polarización viene dada por:

$$\mathbf{m} = (\cos \theta, \sin \theta) \quad (5.38)$$

siendo θ el ángulo que forma la normal a la banda con el eje x . Considerando un elemento biunitario, el vector de velocidades nodales para el movimiento de localización se obtiene sustituyendo (5.13) y (5.38) en (5.27), resultando:

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}^{eT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta}{\sin \theta} \\ \cos \theta + \sin \theta \\ \frac{(-\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta}{\sin \theta} \\ -\cos \theta + \sin \theta \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

La figura 5.11 muestra la evolución de d^2W_{loc} frente al ángulo θ para cada uno de los elementos considerados. De esta figura se concluye que la banda de localización está orientada a 90° .

Efectuando el análisis espectral se obtienen los resultados del cuadro 5.9³.

³Al igual que sucedía en el estado uniaxial, para $\theta = 90^\circ$, la matriz de rigidez del elemento $Q1/E4$ tiene términos que tienden a $\pm\infty$, por lo que no es posible efectuar el análisis espectral

En este caso, el vector $\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}}$ (5.39) está generado por el subespacio:

$$\dot{\mathbf{d}}_{\text{loc}} \in \{\mathbf{d}_{\text{TR2}}, \mathbf{d}_{\text{VOL}}, \mathbf{d}_{\text{STR}},\}$$

para los elementos $Q4$ y \overline{B} . Dado que el autovalor asociado a \mathbf{d}_{VOL} es negativo, los elementos no capturan la banda de localización.

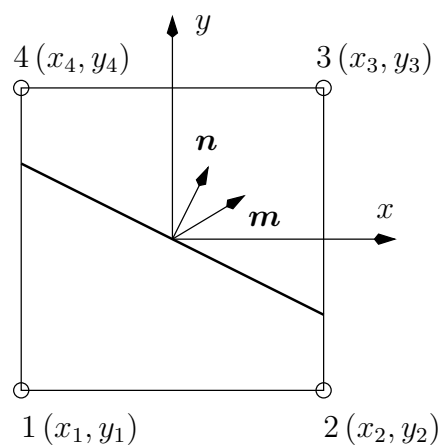


Figura 5.2: Localización. Elemento de referencia.

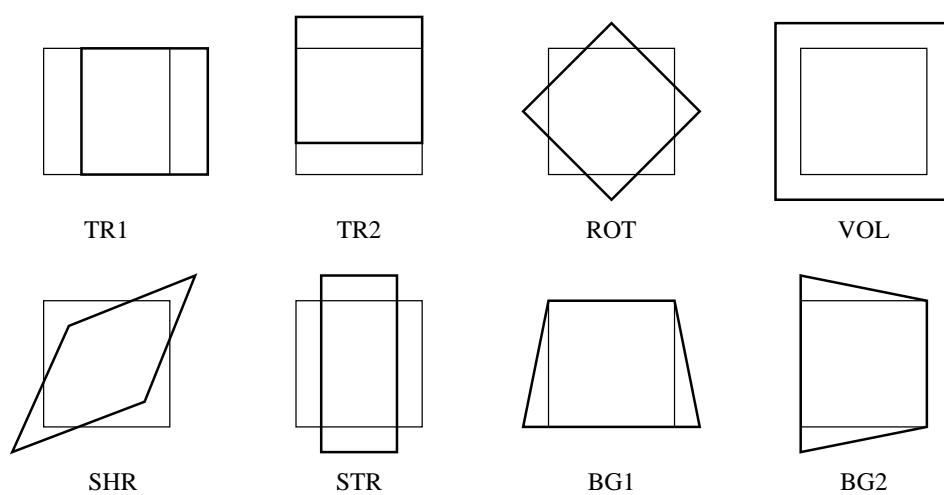


Figura 5.3: Deformación plana. Modos de deformación

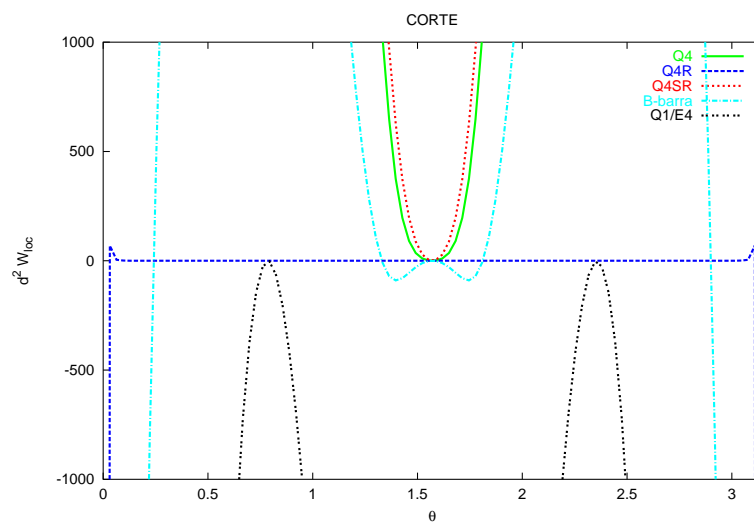


Figura 5.4: Estado de corte. Tasa de la energía de localización. Deformación plana

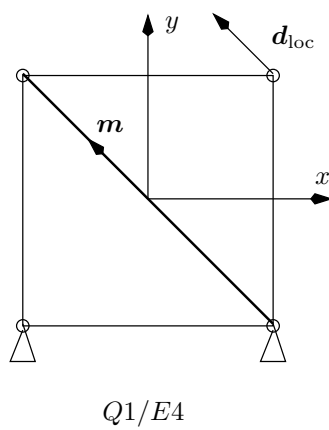


Figura 5.5: Orientación de las bandas y movimiento de localización. Banda a $+45^\circ$

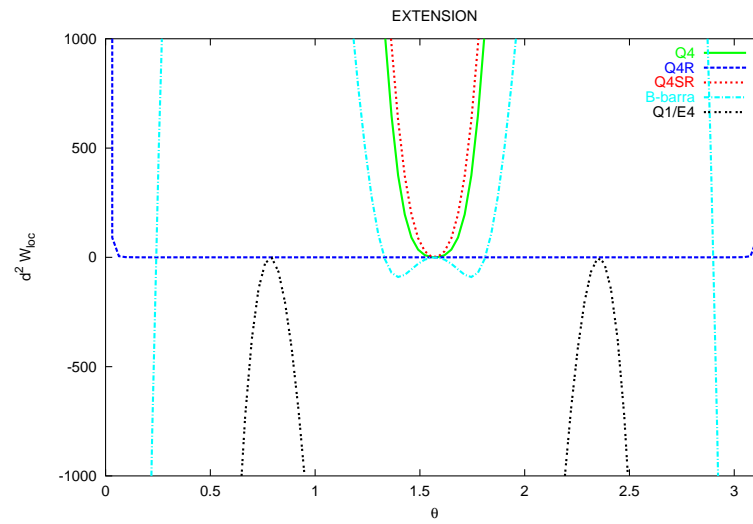


Figura 5.6: *Extensión uniaxial en deformación plana. Tasa de la energía de localización.*

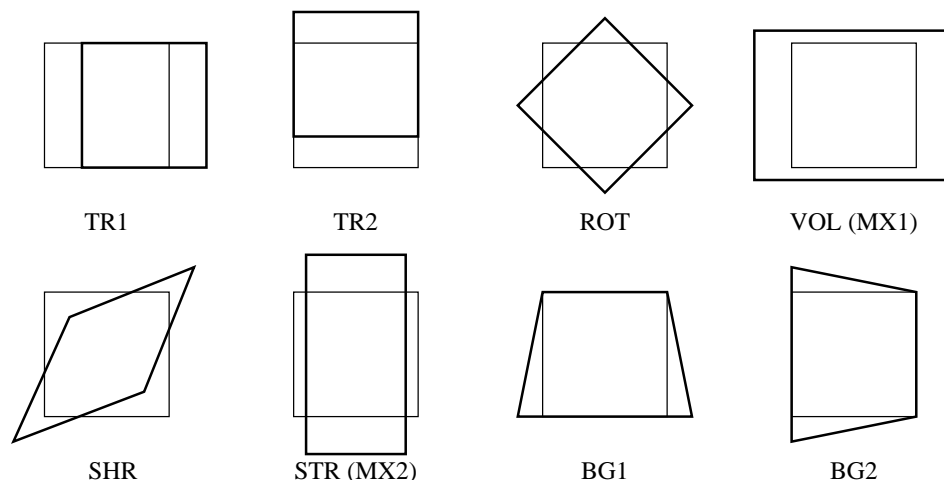


Figura 5.7: *Tensión plana. Modos de deformación para los estados de extensión*

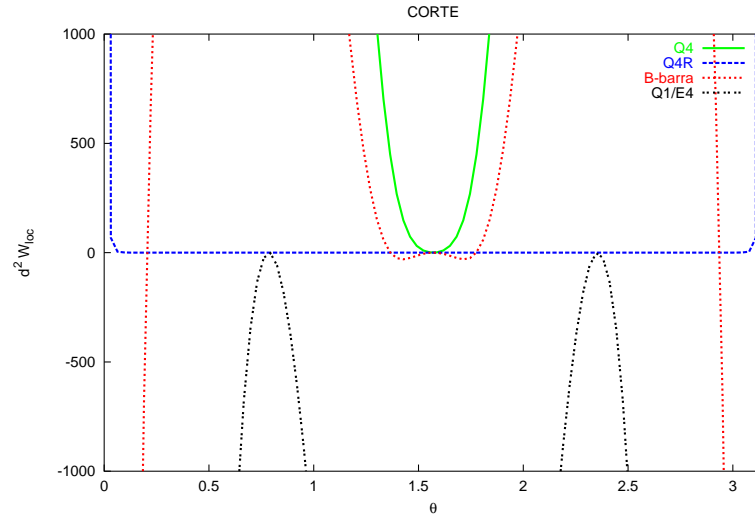


Figura 5.8: *Estado de corte. Tasa de la energía de localización. Tensión plana*

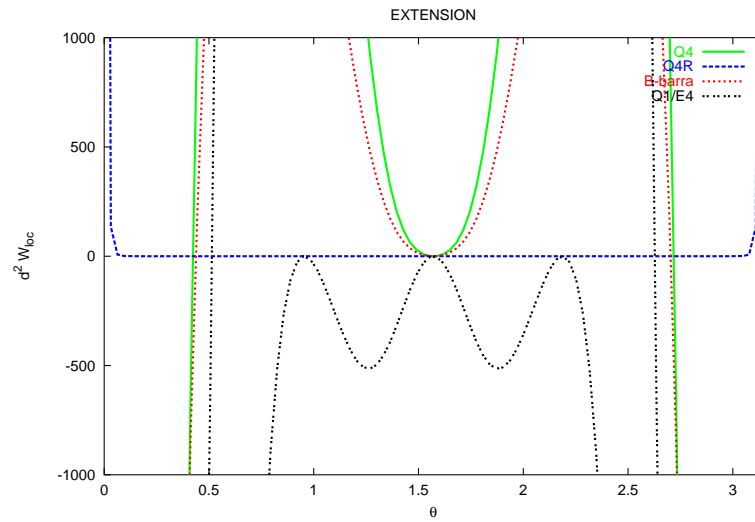


Figura 5.9: *Extensión uniaxial. Tasa de la energía de localización. Tensión plana*

θ	TR1	TR2	ROT	VOL (MX1)	SHR
24,2°	0	0	0	38549,23	2μ
90°	0	0	0	$\frac{1}{2} \frac{12\mu+12\lambda+4\sqrt{25\mu^2+42\lambda\mu+18\lambda^2}}{(3\lambda+4\mu)^2} \mu(3\lambda+2\mu)$	2μ

θ	STR (MX2)	BG1	BG2
24,2°	-29477,99	13840,84	-3124,78
90°	$\frac{1}{2} \frac{12\mu+12\lambda-4\sqrt{25\mu^2+42\lambda\mu+18\lambda^2}}{(3\lambda+4\mu)^2} \mu(3\lambda+2\mu)$	$\frac{\mu}{3} \frac{40\mu^2+84\lambda\mu+45\lambda^2}{(3\lambda+4\mu)^2}$	$\frac{\mu}{3}$

$Q4$

θ	TR1	TR2	ROT	VOL(MX1)	SHR
25,1°	0	0	0	38597,95	2μ
90°	0	0	0	$\frac{1}{2} \frac{12\mu+12\lambda+4\sqrt{25\mu^2+42\lambda\mu+18\lambda^2}}{(3\lambda+4\mu)^2} \mu(3\lambda+2\mu)$	2μ

θ	STR(MX2)	BG1	BG2
25,1°	-26809,75	4376,52	-1008,47
90°	$\frac{1}{2} \frac{12\mu+12\lambda-4\sqrt{25\mu^2+42\lambda\mu+18\lambda^2}}{(3\lambda+4\mu)^2} \mu(3\lambda+2\mu)$	$\frac{\mu}{27} \frac{312\lambda\mu+153\lambda^2+176\mu^2}{(3\lambda+4\mu)^2}$	$\frac{\mu}{27} \frac{132\lambda\mu+45\lambda^2+104\mu^2}{(3\lambda+4\mu)^2}$

\bar{B}

θ	TR1	TR2	ROT	VOL(MX1)	SHR	STR(MX2)	BG1	BG2
29,5°	0	0	0	38840,93	23076,92	-16156,06	26103,02	-6813,80
54,7°	0	0	0	39473,68	23076,92	0	0	0
90°	—	—	—	—	—	—	—	—

$Q1/E4$

Cuadro 5.8: *Análisis espectral de la matriz de rigidez. Extensión uniaxial. Tensión plana*

θ	TR1	TR2	ROT	VOL	SHR	STR	BG1	BG2
$Q4$	0	0	0	-2μ	2μ	2μ	$\frac{\mu}{3}$	$\frac{\mu}{3}$
\bar{B}	0	0	0	-2μ	2μ	2μ	$\frac{17\mu}{27}$	$\frac{17\mu}{27}$
$Q1/E4$	—	—	—	—	—	—	—	—

Cuadro 5.9: *Análisis espectral de la matriz de rigidez ($\theta = 90^\circ$). Estado equibiaxial. Tensión plana.*

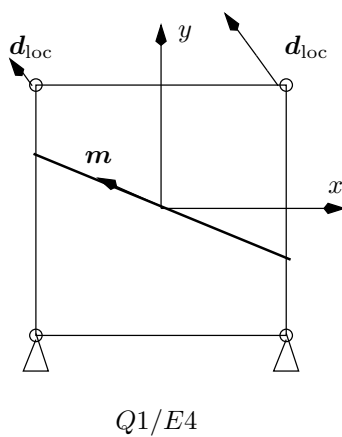


Figura 5.10: *Orientación de las bandas y movimiento de localización. Banda $a + 54,7^\circ$*

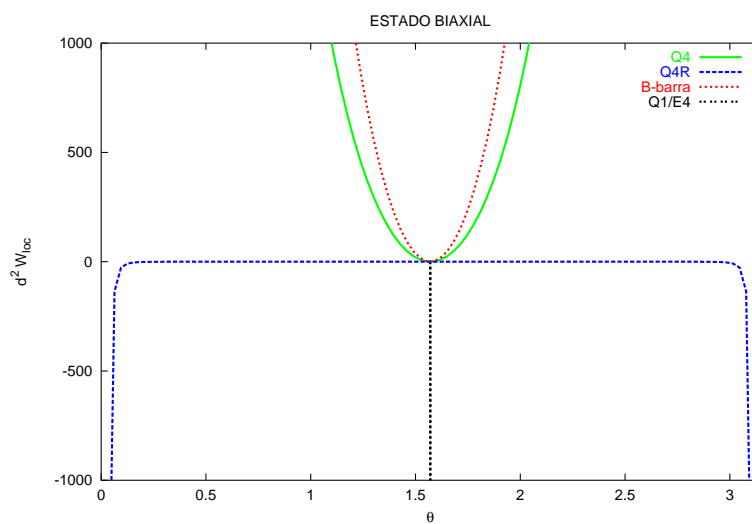


Figura 5.11: *Estado biaxial. Tasa de la energía de localización. Tensión plana*

5.2.5. Ejemplos

En este apartado se analizan dos ejemplos de formación de bandas de localización, resueltos numéricamente con distintas familias de elementos finitos: $Q4$, $Q1/P0$ (Garino, 1993) y los elementos mejorados $Q1/E4$, $Q1/ES4$ y $Q1/ET4$ (Simó y Armero, 1993; Simó et al., 1993a; Glaser y Armero, 1995). Los elementos se formulan en el contexto de la plasticidad con grandes deformaciones, empleando el modelo constitutivo descrito en el capítulo 3. El modelo constitutivo y todos los elementos los ha implementado el autor de este trabajo en el programa de elementos finitos FEAP (Taylor, 1999).

Ensayo de localización de un elemento

Este ejemplo, propuesto inicialmente para pequeñas deformaciones en (Ortiz et al., 1987), y empleado también para grandes deformaciones (modificando las condiciones de contorno) en (Simó et al., 1993a), evalúa las prestaciones de los elementos para capturar bandas de localización. En la figura 5.12 se define la geometría y condiciones de contorno impuestas. El desplazamiento aplicado al vértice superior es $u = 10$. Las características mecánicas elásticas son $E = 206,9$ y $\nu = 0,29$. La tensión de fluencia es 0.45 y la ley de saturación para el endurecimiento:

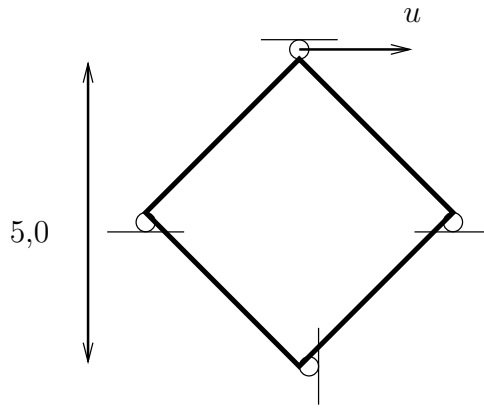


Figura 5.12: Ensayo de localización de un elemento

$$\sigma_Y = 0,45 + 0,26 (1 - e^{-16,93\varepsilon_p}) - 0,13\varepsilon_p$$

El problema se ha resuelto empleando reglas de integración de cuatro, cinco y nueve puntos de Gauss para los elementos mejorados.

En las figuras 5.13, 5.14 y 5.15 se muestran las deformadas obtenidas para las distintas reglas de integración empleadas. De estas figuras es de destacar la diferencia de los resultados obtenidos con unos y otros elementos, e incluso al emplear un mismo elemento con distintas reglas de integración.

En la figura 5.16 se muestra la evolución de la energía interna incremental frente al desplazamiento impuesto. Suponiendo que las deformaciones elásticas son pequeñas y que por tanto prácticamente toda la energía de deformación es de naturaleza inelástica, menores valores de la energía disipada dan lugar a bandas más estrechas. Con este criterio, en este ejemplo la banda más estrecha se obtiene con el elemento $Q1/E4$, independientemente de la regla de integración empleada. Asimismo, se puede comprobar que las re-

glas de cinco y nueve puntos rigidizan el elemento, dando lugar a bandas de localización más anchas que las que se obtendrían con cuatro puntos.

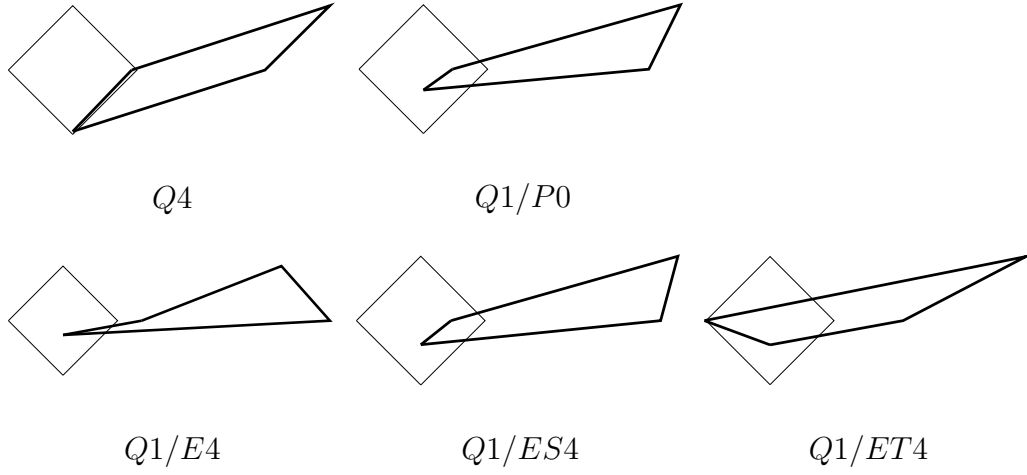


Figura 5.13: *Deformadas. 4 puntos de Gauss.*

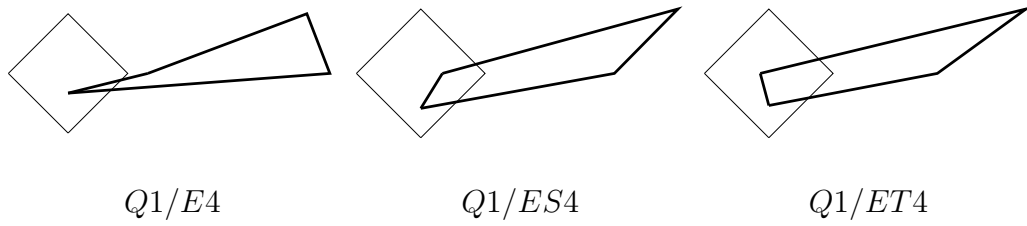


Figura 5.14: *Deformadas. 5 puntos de Gauss.*

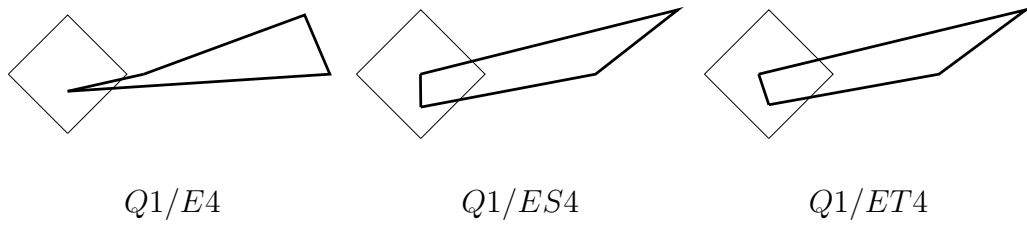


Figura 5.15: *Deformadas. 9 puntos de Gauss.*

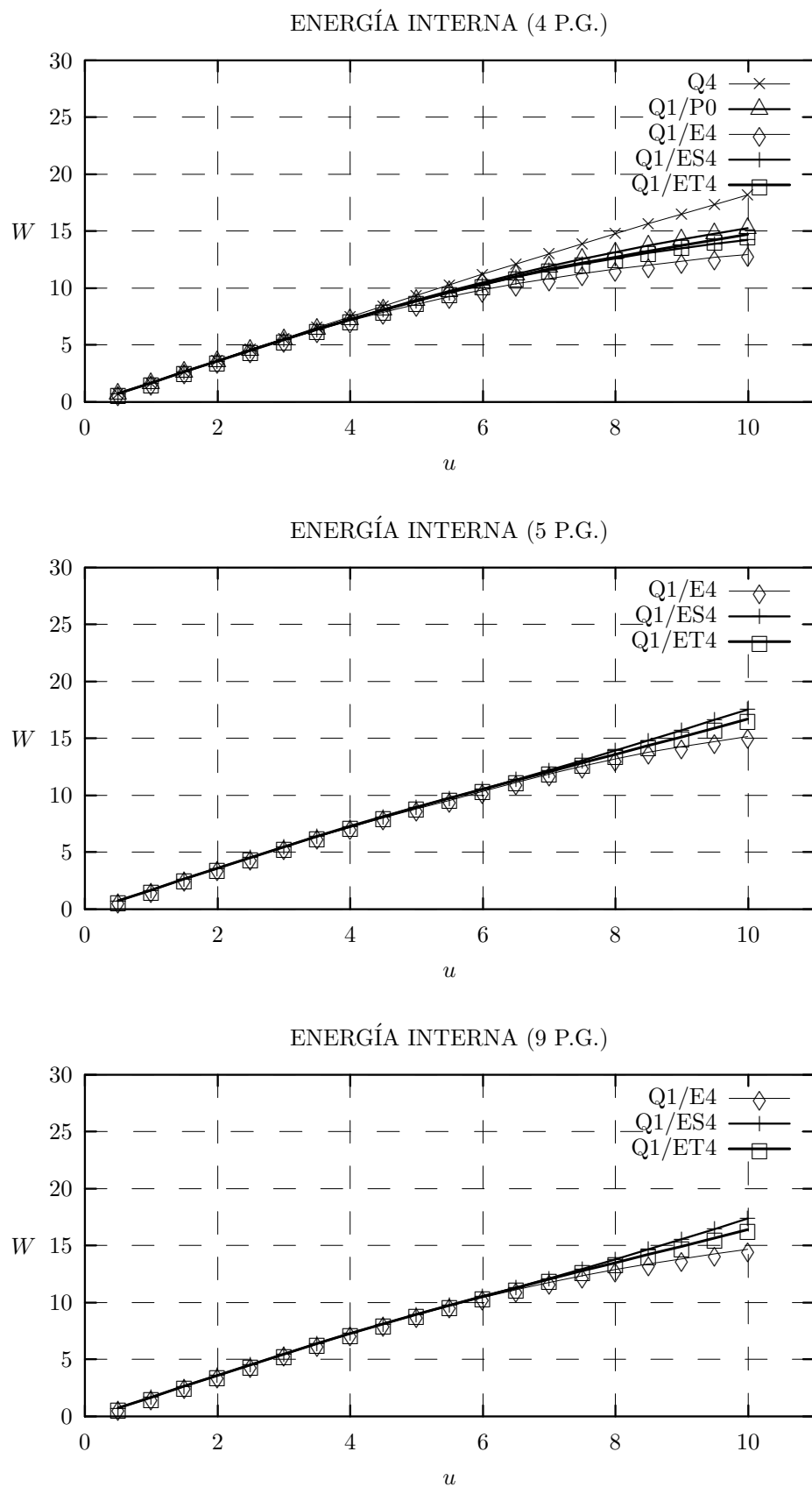


Figura 5.16: Evolución incremental de la energía interna para reglas de integración de 4, 5 y 9 puntos de Gauss

A continuación se analiza la participación de los autovectores de la matriz de rigidez elemental, durante el proceso de deformación. Estos autovectores se muestran en la figura 5.17.

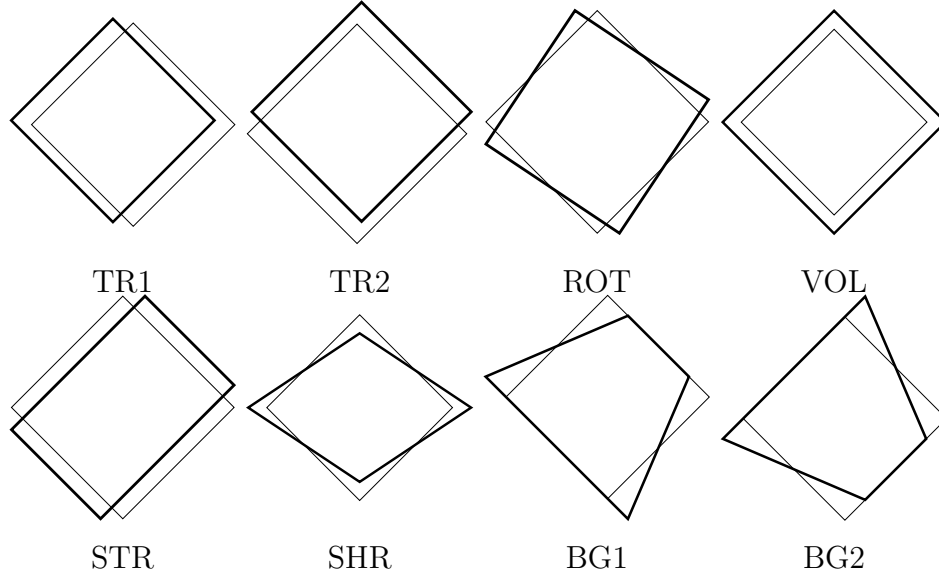


Figura 5.17: Autovectores de la matriz de rigidez elemental

Sean \mathbf{e}_i los modos normalizados (respecto de la norma euclídea) y \mathbf{d}^e el vector de desplazamientos nodales. Expresando \mathbf{d}^e como la combinación lineal de los modos de deformación:

$$\mathbf{d}^e = \sum_{i=1}^8 p_i \mathbf{e}_i \quad (5.40)$$

la contribución p_i de cada modo al vector de desplazamientos nodales se obtiene mediante la proyección:

$$p_i = \mathbf{d}^e \cdot \mathbf{e}_i \quad i = 1 \dots 8 \quad (5.41)$$

En las figuras 5.18, 5.19 y 5.20 se muestra la evolución de las contribuciones p_i de cada modo, empleando 4, 5 y 9 puntos de Gauss, respectivamente.

De estas curvas se extraen las siguientes conclusiones:

- La evolución de los modos de rotación infinitesimal de sólido rígido (ROT) y estiramiento (STR) es la misma para todos los elementos y todas las reglas de integración.
- Excluyendo los modos de sólido rígido, la contribución del resto de los modos en el elemento Q4 es prácticamente despreciable comparada con la de los demás elementos.
- La respuesta del elemento Q1/P0 es muy parecida a la del elemento Q1/ET4 para los modos de corte y volumétrico, y ligeramente similar a la del elemento Q1/ES4 para los modos de flexión (BG1 y BG2).

- Para los elementos mejorados, las reglas de integración con cuatro y cinco puntos de Gauss dan resultados más rígidos que con cuatro puntos de Gauss.
- La participación de los modos de corte (SHR) y volumétrico (VOL) son mayores en el elemento $Q1/E4$ que $Q1/ES4$ y $Q1/ET4$.

Dado que la regla de integración de cuatro puntos presenta problemas de subintegración en los elementos con formulación de deformaciones mejoradas (Simó et al., 1993a), es interesante comparar los resultados obtenidos con cinco y nueve puntos de Gauss. Aunque en general, la solución calculada con cinco puntos es más rígida que la calculada con nueve puntos, analizando las contribuciones de cada modo se puede concluir que:

- Empleando cinco puntos de Gauss no se obtiene una solución significativamente más rígida para los modos de corte (SHR) y volumétrico (VOL).
- En los modos de flexión (BG1 y BG2) la regla de cinco puntos da soluciones notablemente más rígidas para el elemento $Q1/ES4$.

Por último, para investigar las prestaciones de los elementos para capturar bandas de localización, se ha analizado el valor del determinante del tensor acústico a lo largo del proceso de carga. En una primera fase se han calculado los valores de $\det(\mathbf{Q})$ para orientaciones de la banda a 0° , $\pm 15^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 60^\circ$, $\pm 75^\circ$ y 90° . Los valores mínimos de $\det(\mathbf{Q})$ se presentan cuando las bandas se desarrollan según las diagonales del elemento. Para esta orientación, en la figura 5.21 se muestra la evolución del valor de $\det(\mathbf{Q})$ normalizado con el valor del régimen elástico frente al desplazamiento u , para los elementos y reglas de integración considerados. De la interpretación de estas curvas se concluye que cuando comienza el flujo plástico, el tensor acústico se hace decreciente para el elemento $Q4$, y presenta un mínimo para los demás elementos. Dicho mínimo se alcanza antes para los elementos con deformaciones supuestas que para el elemento mixto $Q1/P0$. Para los elementos de deformaciones supuestas estos resultados son los mismos con independencia del tipo de elemento y de la regla de integración.

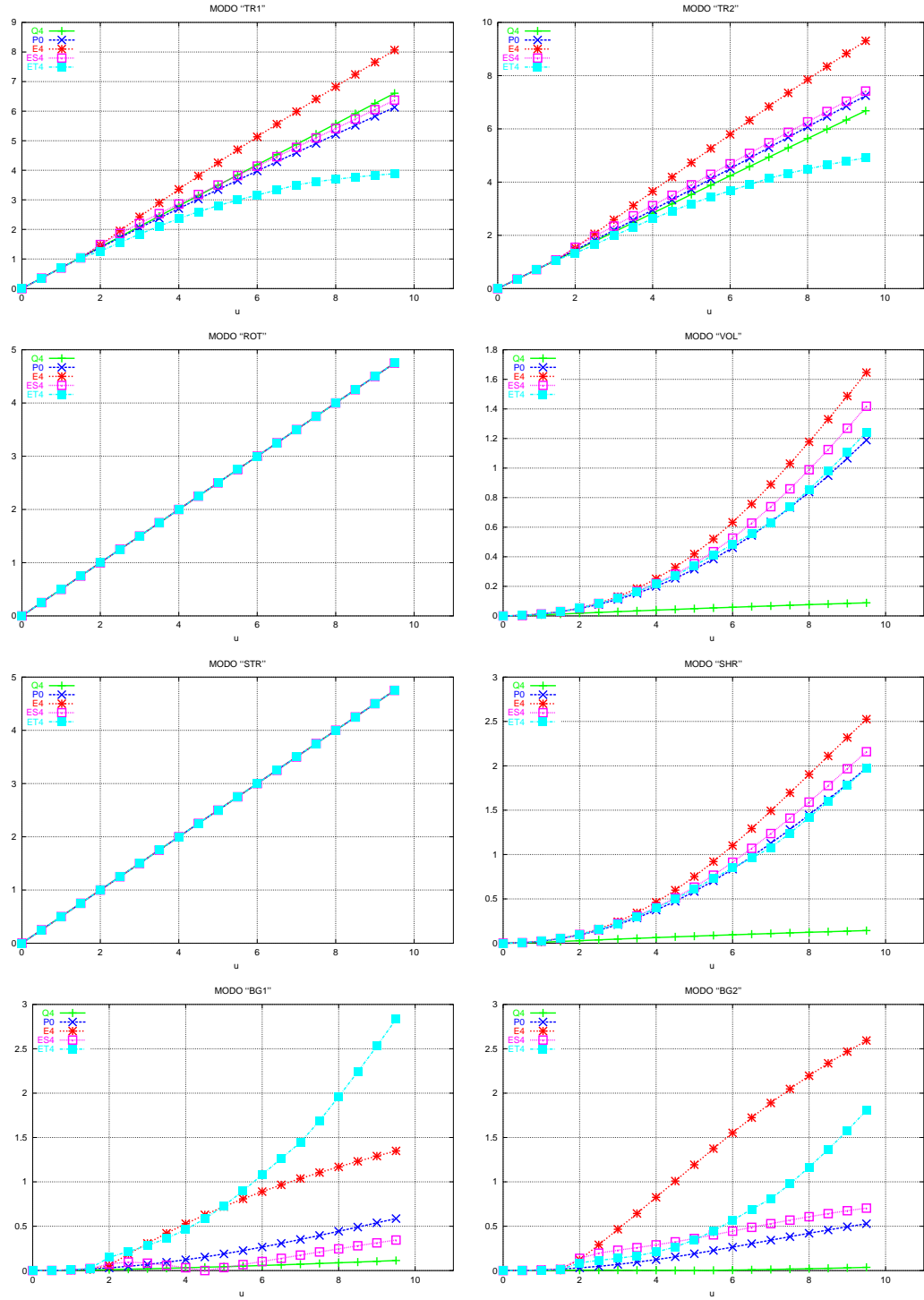


Figura 5.18: Evolución de los modos de la matriz de rigidez. Regla de integración de 4 puntos de Gauss

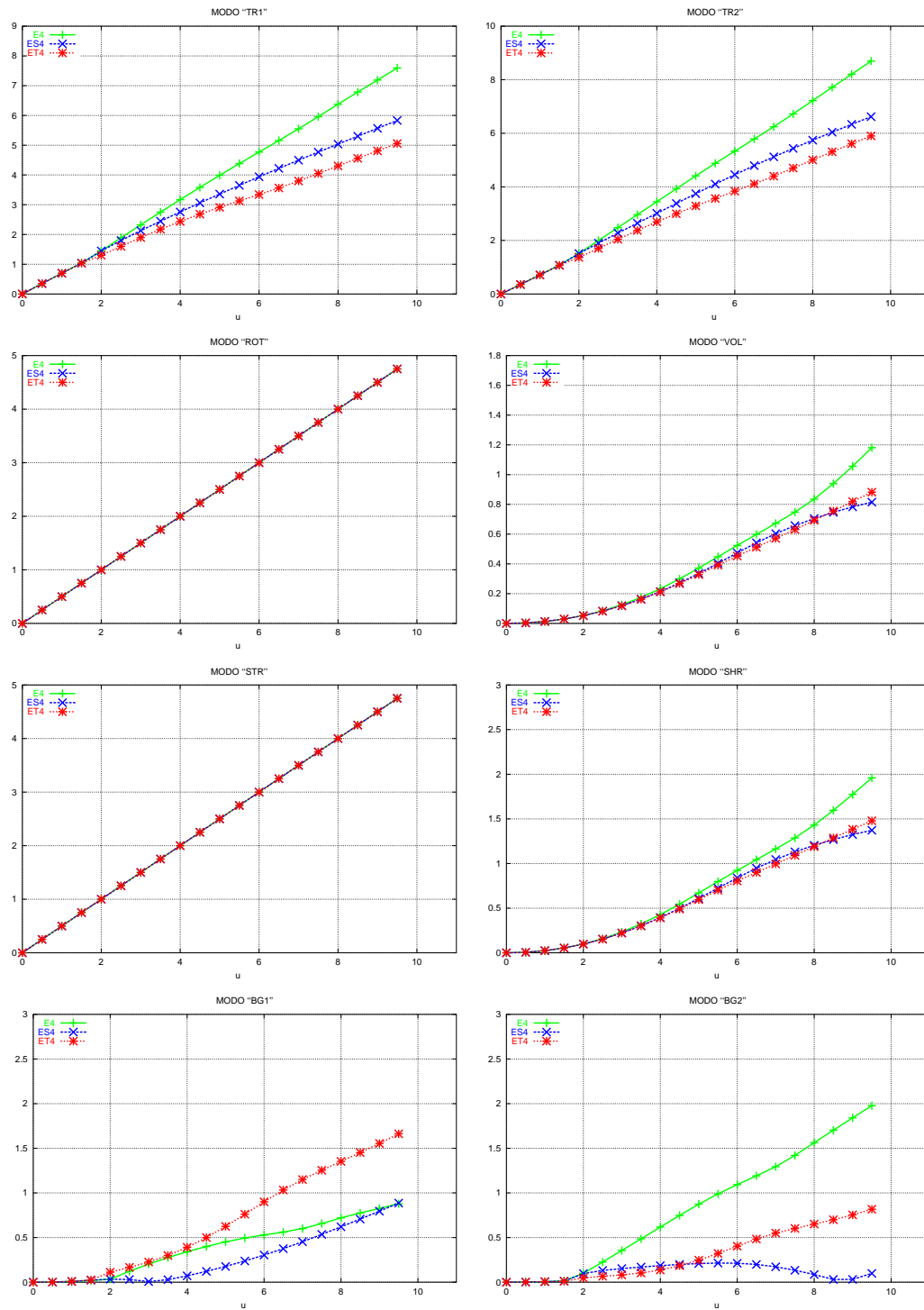


Figura 5.19: Evolución de los modos de la matriz de rigidez. Regla de integración de 5 puntos de Gauss

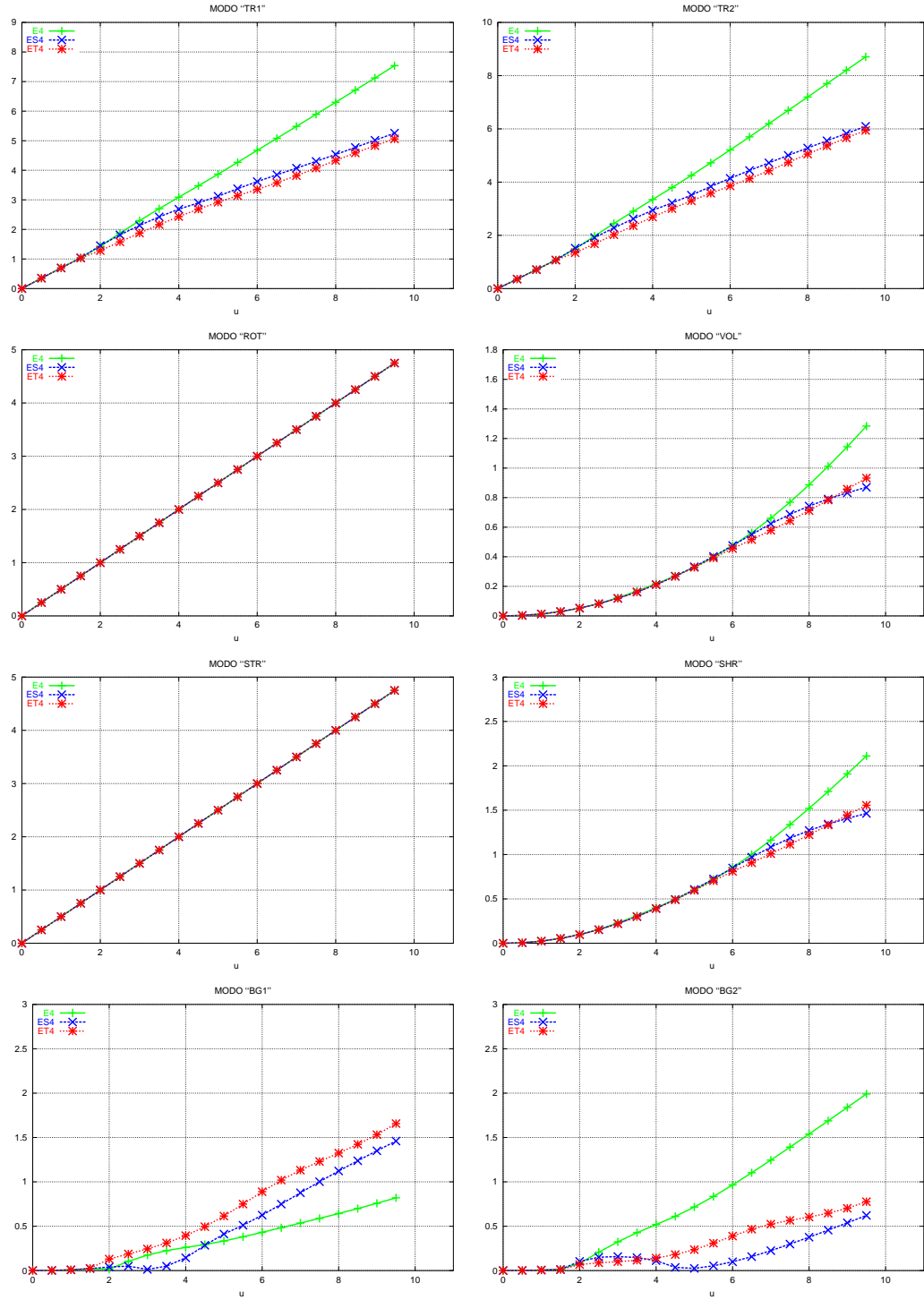


Figura 5.20: Evolución de los modos de la matriz de rigidez. Regla de integración de 9 puntos de Gauss

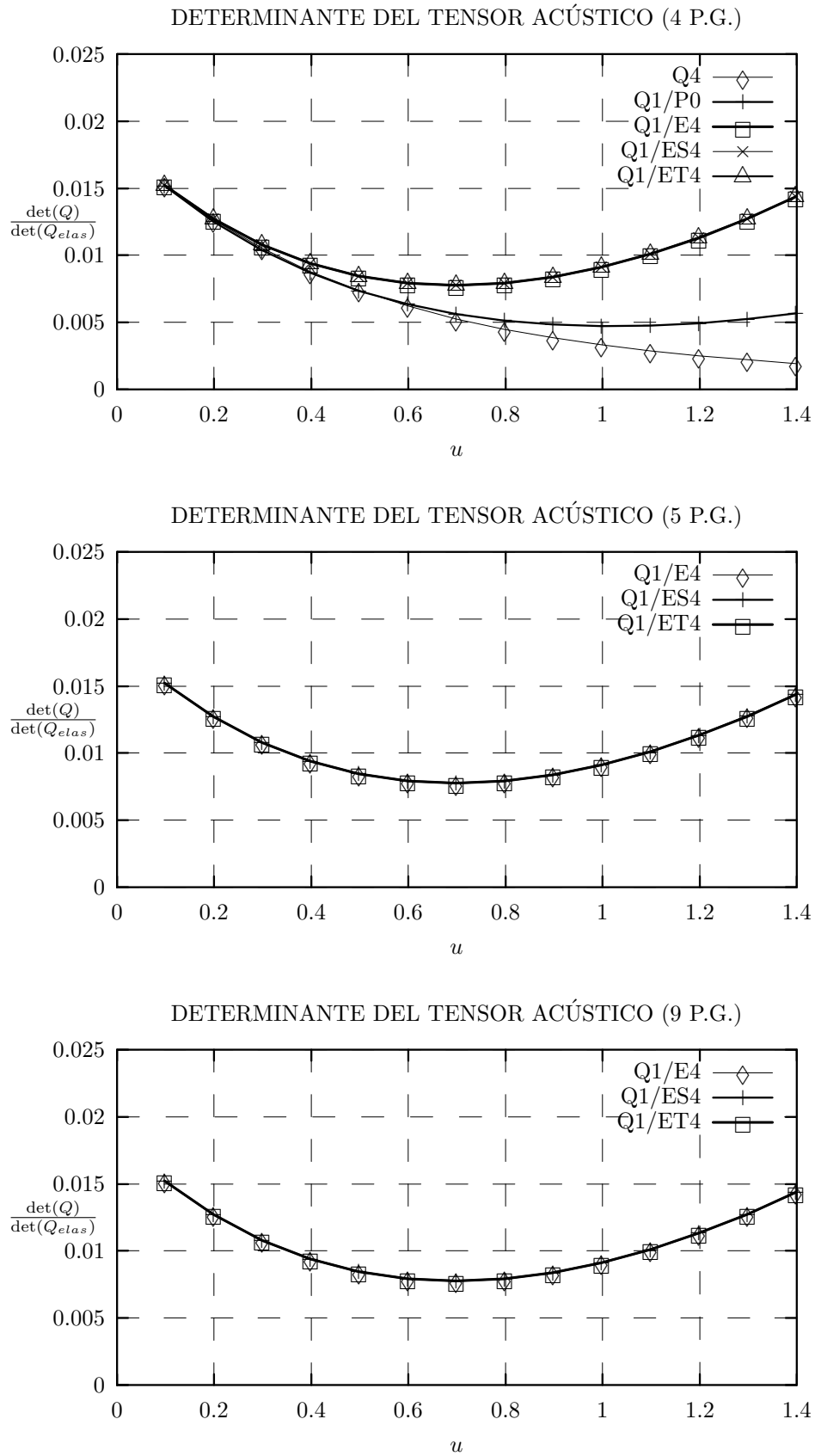


Figura 5.21: Evolución del determinante del tensor acústico para reglas de integración de 4, 5 y 9 puntos de Gauss

Tracción de una probeta en deformación plana

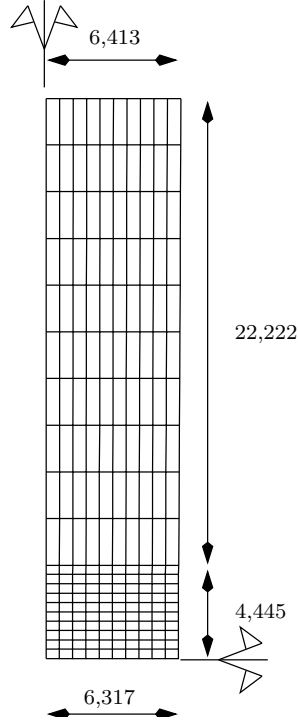


Figura 5.22: Malla de elementos finitos.

Este ejemplo, que analiza la formación de bandas de localización en una probeta traccionada en deformación plana, lo han analizado anteriormente (Simó y Armero, 1993; Simó et al., 1993a; Armero y Glaser, 1997). En una primera fase del proceso de deformación, la probeta se mantiene en un estado de deformación homogénea. Posteriormente, mientras que se alcanza el valor de la carga máxima aplicada, comienza a desarrollarse una estricción para la cual la distribución de deformaciones plásticas en el cuello es difusa. En la última fase del proceso, la deformación de la probeta es tal que se desarrollan dos bandas de localización que forman 45° con la dirección axial de carga. En esta fase, la deformación plástica se localiza en dichas bandas.

Las dimensiones de la probeta son $12,826 \times 53,334$, discretizándose una cuarta parte por las condiciones de simetría del problema. La malla empleada, que se muestra en la figura 5.22, tiene 10×20 elementos. Para que se desarrollen las bandas de localización se introduce una imperfección geométrica que consiste en disminuir el ancho de la probeta en la sección central en un $1,8\%$ respecto de la sección extrema, siendo lineal la variación del ancho entre una y otra. El análisis se realiza con control de desplazamientos. La ley de endurecimiento empleada corresponde a la doble parábola propuesta en (Ortiz et al., 1987):

$$\sigma_Y = \sigma_0 (C + B\varepsilon_p + A\varepsilon_p^2)$$

siendo: $\sigma_0 = 0,45$ y

$$\begin{aligned} A &= -14,5; & B &= 5,8; & C &= 1; & \text{para } \varepsilon_p \leq 0,2 \\ A &= -2,8642; & B &= 1,1457; & C &= 1,4654; & \text{para } \varepsilon_p \geq 0,2 \end{aligned}$$

En este trabajo se comparan los resultados obtenidos con los elementos con formulación en desplazamientos $Q4$, el elemento mixto de presión constante $Q1/P0$, y los elementos $Q1/E4$, $Q1/ES4$ y $Q1/ET4$ integrados con 4, 5 y 9 puntos de Gauss.

En la figura 5.23 se muestran las deformadas y los contornos de deformación plástica obtenidos con los elementos $Q4$, $Q1/P0$ y $Q1/E4$ integrado con la regla de cuatro puntos de Gauss. De esta figura se concluye que la cinemática de los elementos mejorados es la única que captura la banda con nitidez, aunque las deformaciones plásticas muestran una ligera tendencia a localizarse también en el elemento $Q1/P0$.

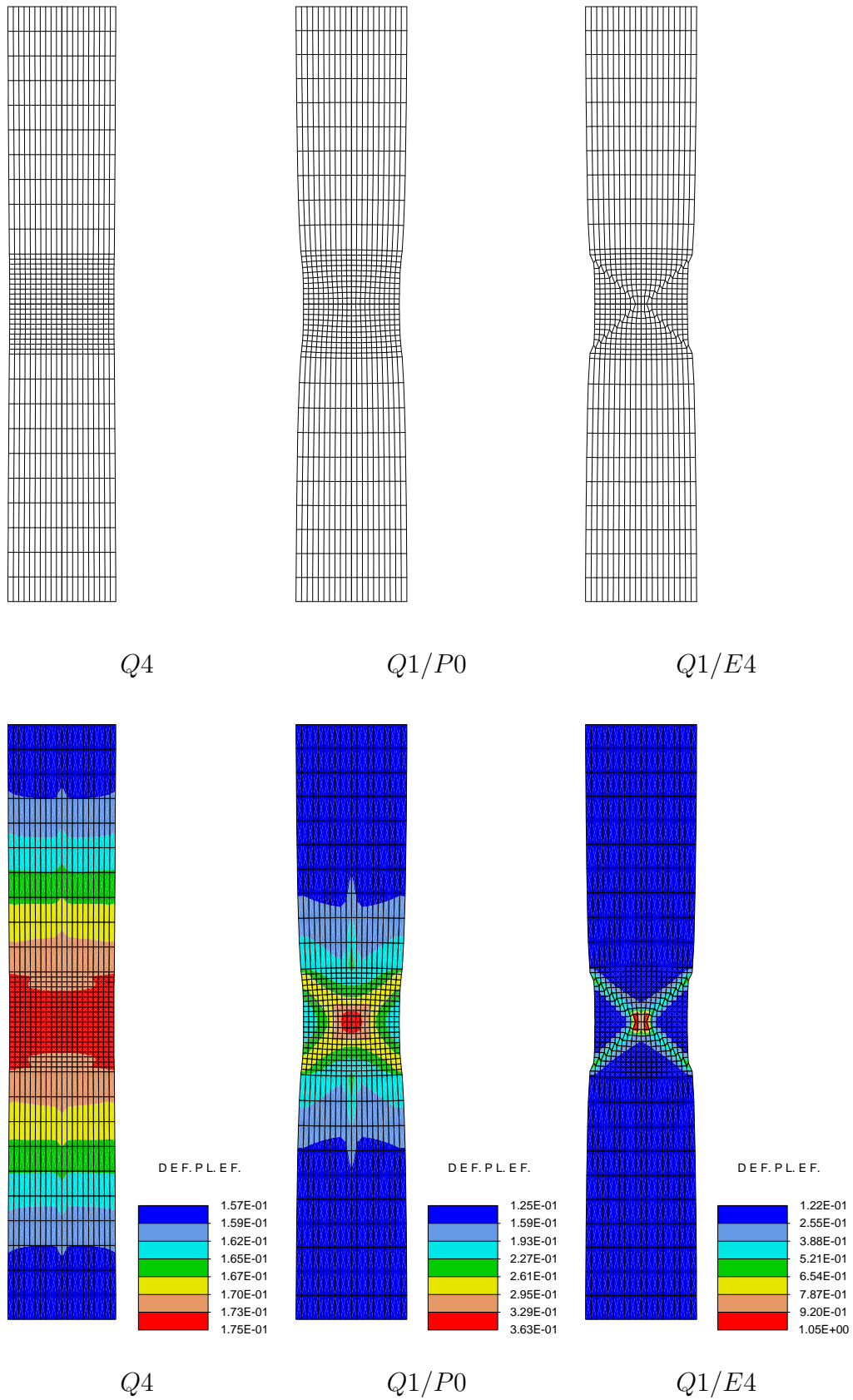


Figura 5.23: Tracción de una probeta en deformación plana. Deformadas y contornos de deformación plástica efectiva

Con objeto de comparar la respuesta de los distintos elementos mejorados, en la figura 5.24 se muestran las deformadas obtenidas con los elementos $Q1/E4$, $Q1/ES4$ y $Q1/ET4$ integrados con cinco puntos de Gauss. Como puede observarse las bandas se capturan nítidamente con los elementos $Q1/E4$ y $Q1/ES4$ y están más difusas con $Q1/ET4$.

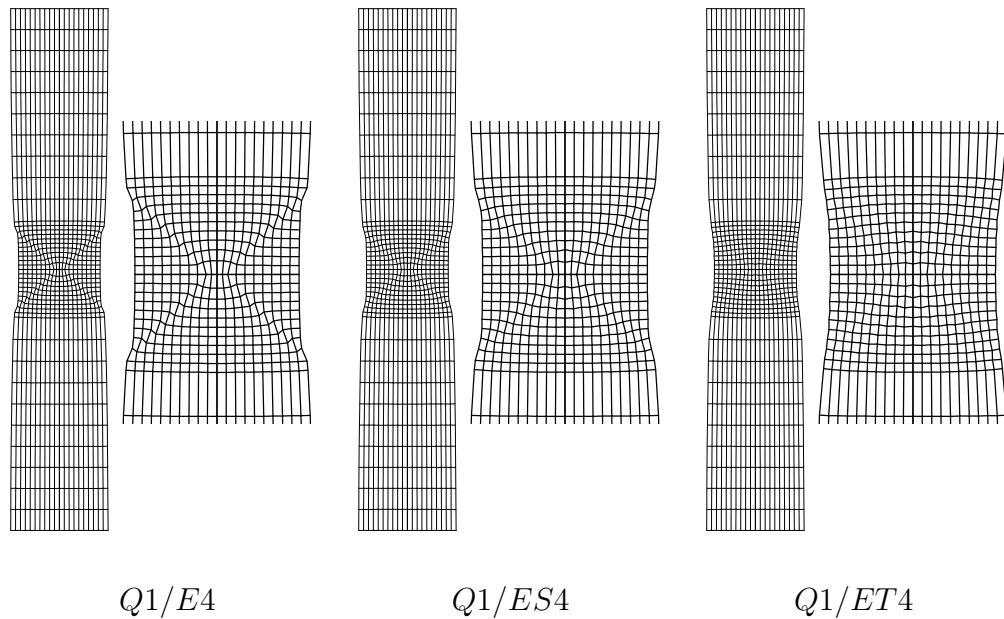


Figura 5.24: *Deformadas obtenidas con la regla de 5 puntos de Gauss*

Asimismo, en la figura 5.25 se muestra un detalle de las bandas obtenidas con el elemento $Q1/E4$ para las distintas reglas de integración.

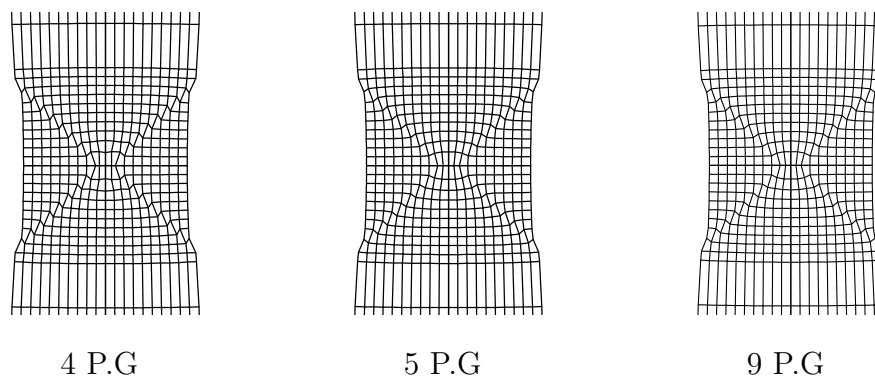


Figura 5.25: *Elemento $Q1/E4$. Deformadas obtenidas con las distintas reglas de integración*

De los resultados que se muestran en las figuras 5.24 y 5.25 se puede concluir que para este ejemplo, la regla de integración de cinco puntos da lugar a resultados más rígidos, y que el elemento $Q1/ET4$ es más rígido que

el elemento $Q1/ES4$ que a su vez lo es más que el elemento $Q1/E4$. Esta conclusión sobre la variación de la rigidez con el orden de la cuadratura, y con el tipo de elemento se corrobora con las curvas Fuerza-Desplazamiento que se muestran en las figuras 5.26 y 5.27.

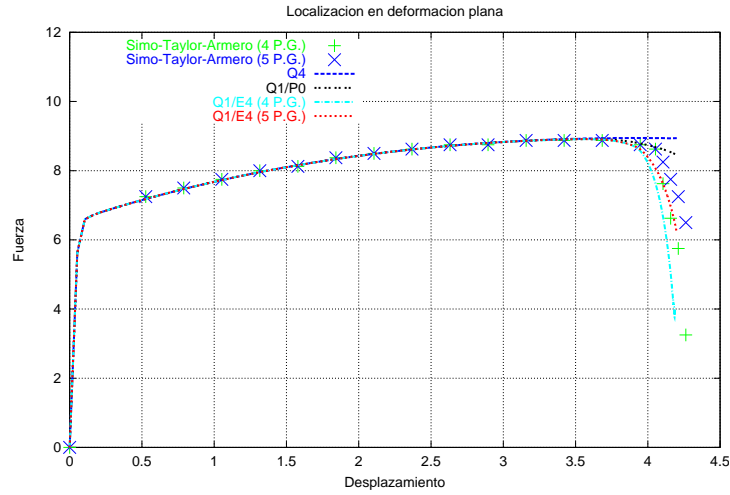


Figura 5.26: Curva Fuerza-Desplazamiento para los elementos Q4, Q1/P0 y Q1/E4 (con 4 y 5 puntos de Gauss)

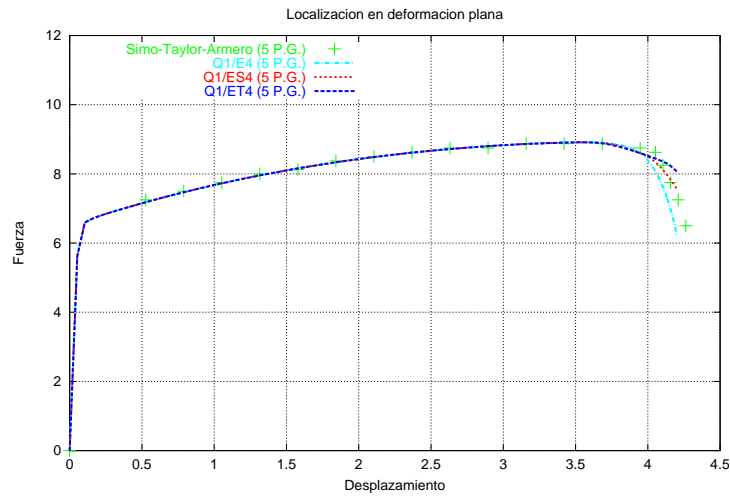


Figura 5.27: Curva Fuerza-Desplazamiento para los elementos mejorados integrados con 5 puntos de Gauss

5.2.6. Conclusiones

En este apartado se han analizado las prestaciones de distintas familias de elementos, con formulación en deformaciones supuestas, para capturar bandas de localización en problemas con plasticidad de Von Mises. Para ello se han empleado dos metodologías:

1. Análisis del tasa de segundo orden de la energía interna, empleando el criterio propuesto en (Steinmann y Willam, 1991; Steinmann y Willam, 1990). La aportación realizada a esta metodología es la solución analítica de la misma mediante un programa de álgebra simbólica (Maple, 1991a), que permite obtener resultados de carácter más general.
2. Solución mediante elementos mejorados con formulación en grandes desplazamientos de ejemplos en los que se produce localización, analizando la contribución de los distintos modos de deformación de la matriz de rigidez y la evolución del determinante del tensor acústico.

Del análisis analítico de las prestaciones de los elementos para capturar las bandas se concluye:

1. De los elementos analizados, únicamente capturan bandas de localización los elementos con formulación de deformaciones mejoradas.
2. En deformación plana las capturan a $\pm 45^\circ$, para estados tensionales de corte puro y extensión simple.
3. En tensión plana, las bandas se capturan a $\pm 45^\circ$ en corte puro. Para el estado de extensión uniaxial se capturan a $\pm 35,3^\circ$ con la dirección de extensión.

De los ejemplos analizados se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. Los elementos mejorados capturan adecuadamente las bandas de localización para determinadas orientaciones. En este sentido, la cinemática del elemento $Q1/ET4$ da lugar a que se formen bandas algo más dispersas.
2. El aumento del orden de la cuadratura de Gauss, especialmente la regla de cinco puntos, mejora la estabilidad de los elementos pero rigidiza ligeramente el comportamiento post-fallo de los mismos.

5.3. Localización en materiales cohesivo-friccionales

5.3.1. Introducción

El modelo de Von-Mises, empleado en las aplicaciones del apartado anterior, describe adecuadamente el comportamiento de los metales. Existen

otros materiales en ingeniería que no se pueden representar adecuadamente con los modelos elastoplásticos independientes de la presión: suelos, rocas, hormigón, etc. Estos materiales se denominan de forma genérica *materiales cohesivo-friccionales*. En la práctica, la formación de las bandas de localización en estos materiales se presenta en fenómenos de inestabilidad de taludes, de hundimiento de cimentaciones, rotura de depósitos arenosos densos sobre superficies rocosas, etc.

El objetivo de esta parte del capítulo es analizar las prestaciones de los elementos de deformaciones mejoradas supuestas para capturar bandas de localización de deformaciones, empleando modelos constitutivos no asociativos. La falta de asociatividad y la dilatancia pueden producir inestabilidades del material que den lugar a la formación de bandas de localización, incluso sin reblandecimiento. El aumento de volumen asociado al ángulo de dilatancia induce una disminución del ángulo de rozamiento interno. En consecuencia las tensiones pueden disminuir al aumentar la deformaciones, incluso en materiales con endurecimiento. En primer lugar se describe el modelo constitutivo empleado, que es el de Drucker-Prager. A continuación se analizan tres ejemplos en los que se muestran algunas consecuencias prácticas de la no asociatividad del modelo. Por último se analizan varios problemas clásicos de la mecánica de suelos en los cuales una vez desarrolladas las bandas de localización, se alcanza la rotura.

5.3.2. Modelo constitutivo

En este trabajo, el modelo constitutivo empleado para representar el comportamiento de los materiales cohesivo-friccionales es el de Drucker-Prager. Este modelo, muy extendido y simple, incorpora la dependencia del primer invariante del tensor de tensiones y del segundo invariante del tensor de tensiones desviadoras de Cauchy.

La función de fluencia viene definida por:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha, k) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k \quad (5.42)$$

donde I_1 , J_2 son los invariantes:

$$I_1 = \text{traza}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (5.43)$$

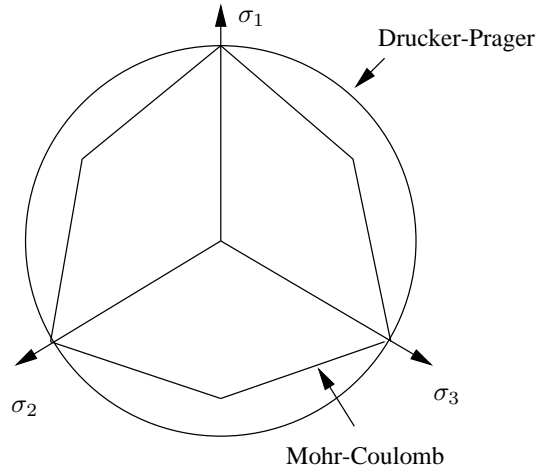
$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}; \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{1} \quad (5.44)$$

La función F define un cono en el espacio de tensiones. Las constantes α y k de (5.42) se pueden relacionar con las constantes del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb: la cohesión c y el ángulo de rozamiento interno ϕ . El ajuste de ambas superficies se puede realizar de diversas formas (Chen y Saleeb, 1982). En este trabajo el cono de Drucker-Prager se ajusta a la pirámide hexagonal de Mohr-Coulomb haciendo que pase por los vértices del hexágono

situados en los ejes del espacio de tensiones principales (ver figura 5.28). De esta manera resulta:

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (5.45)$$

$$k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (5.46)$$



El flujo plástico del material no depende de la velocidad de deformación y cumple la regla de flujo:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (5.47)$$

siendo la expresión de la función potencial plástico:

$$G(\sigma, \beta) = \beta I_1 + \sqrt{J_2} \quad (5.48)$$

El parámetro β se expresa en términos del ángulo de dilatación de manera análoga a (5.45):

$$\beta = \frac{2 \operatorname{sen} \psi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \psi)} \quad (5.49)$$

Observación 5.3.1 Para valores de $\beta \neq \alpha$ el modelo de Drucker-Prager es no asociativo y deja de verificarse el principio de máxima disipación plástica. Algunas consecuencias prácticas de la no asociatividad se analizan en el apartado 5.3.3.

Por último, es necesario definir la ley de evolución de las variables internas o criterio de endurecimiento. Se toma como variable que cuantifica el daño plástico la deformación plástica efectiva:

$$\epsilon^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} \quad (5.50)$$

Con la evolución de ϵ^p queda definida la evolución de otras variables internas (tensión de fluencia, cohesión, ángulo de rozamiento interno, etc.) mediante la definición de una ley de endurecimiento.

En este trabajo se han implementado dos leyes de endurecimiento:

1. Relación tensión de fluencia Y - deformación plástica efectiva ϵ^p , mediante un módulo de endurecimiento H constante a trozos:

$$H = \frac{dY}{d\epsilon^p} \quad (5.51)$$

Esta ley de endurecimiento tiene la ventaja de poder interpretarse como una generalización de las leyes de endurecimiento definidas en la plasticidad de Von-Mises. Dado que la tensión de fluencia uniaxial se puede relacionar con la cohesión:

$$Y = \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (5.52)$$

la ecuación (5.51) se puede interpretar como una ley que define la evolución de la cohesión. Desde un punto de vista geométrico, esta ley de endurecimiento se traduce en una expansión del cono de Drucker-Prager manteniendo constante el ángulo de rozamiento interno. En la práctica esta ley es aplicable a materiales con elevada capacidad cohesiva.

2. Relación ángulo de rozamiento interno ϕ y deformación plástica efectiva ε^p . La relación implementada es la propuesta por (Leroy y Ortiz, 1989):

$$\alpha = \alpha_0 + (\alpha_{\text{sat}} - \alpha_0) \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon^p - \varepsilon_{\text{sat}}^p}{\varepsilon_{\text{sat}}^p} \right)^2} \quad \text{si } \varepsilon^p \leq \varepsilon_{\text{sat}}^p \quad (5.53)$$

$$\alpha = \alpha_{\text{sat}} \quad \text{si } \varepsilon^p = \varepsilon_{\text{sat}}^p \quad (5.54)$$

siendo α , α_0 y α_{sat} los valores que resultan de sustituir ϕ , ϕ_0 y ϕ_{sat} en (5.45), respectivamente. Esta ley de endurecimiento establece una transición suave del ángulo de rozamiento interno desde un valor inicial ϕ_0 hasta un valor máximo ϕ_{sat} que se alcanza cuando la deformación plástica efectiva llega a valer $\varepsilon_{\text{sat}}^p$. En este caso el endurecimiento se traduce en una variación del semiángulo del cono de Drucker-Prager. En el contexto de la mecánica de suelos la ley ϕ - ε^p se obtiene mediante ensayos triaxiales que son más habituales que el ensayo de compresión simple necesario para obtener la ley Y - ε^p .

El ángulo de dilatancia se supone constante. La integración numérica de las ecuaciones constitutivas y su implementación en un programa de elementos finitos se explica en el apéndice A. Únicamente es de destacar aquí que la zona del vértice del cono de la superficie potencial, desde el punto de vista numérico es inestable, ya que la actualización de las tensiones en esta zona puede estar mal definida o incluso indeterminada. Para evitarlo, la zona del vértice se sustituye por un casquete esférico (Leroy y Ortiz, 1990) manteniendo la continuidad de la normal a la superficie potencial.

5.3.3. Consecuencias de la no asociatividad

La dilatancia es el fenómeno que da lugar al cambio de volumen asociado a las deformaciones plásticas de corte de un material. Este fenómeno se observa en los materiales granulares incluyendo los de tipo cohesivo como el hormigón o las rocas. Una medida de este fenómeno la da el ángulo de dilatancia ψ , que

representa la tasa de cambio de volumen no recuperable (“volumen plástico”) respecto de la tasa de distorsión plástica

$$\operatorname{sen} \psi = \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\gamma}^p} \quad (5.55)$$

Observación 5.3.2 *En sentido estricto, esta igualdad se verifica solamente en el ensayo de corte simple (Vermeer y de Borst, 1984).*

El ángulo de dilatancia es aproximadamente constante cerca de la resistencia de pico, y su valor es significativamente menor que el ángulo de rozamiento interno. La importancia, desde el punto de vista ingenieril, del fenómeno de la dilatancia se puede comprobar incluso con ejemplos sencillos, de carácter académico. A continuación se muestra la influencia del ángulo de dilatancia en tres casos:

1. Flecha de un arco sometido a peso propio
2. Curva tensión-deformación en un ensayo de corte isocórico
3. Carga límite en el ensayo de corte puro

Ejemplo 5.1 *Se considera un arco semicircular de radio interior $r_{int} = 16$ m. y radio exterior $r_{ext} = 16,5$ m. Las propiedades mecánicas corresponden a un hormigón con $E = 3,2573 \cdot 10^{10}$ Pa, $\nu = 0,2$, $\phi = 33,6^\circ$ e $Y = 2,45 \cdot 10^7$ Pa. con plasticidad perfecta. El arco está sometido a la acción de peso propio siendo el peso específico $w = 22563$ N/m³, impuesto de forma linealmente creciente. Se consideran los casos en que el ángulo de dilatancia tiene un valor realista de $\psi = 8,6^\circ$, y el caso en que $\psi = \phi$ imponiendo así la condición de asociatividad.*

En la figura 5.29 se muestra la malla de elementos finitos y en la figura 5.30, la evolución de la flecha a lo largo del proceso de carga. La flecha obtenidas en el caso no asociativo es un 10,93% mayor que la correspondiente al modelo asociativo.

Ejemplo 5.2 *Este ejemplo, desarrollado en (Vermeer y de Borst, 1984), corresponde a un ensayo de corte simple en el que se obtiene la curva $\tau_{xy} - \gamma_{xy}$ para distintos valores del ángulo de dilatancia. Las propiedades mecánicas adoptadas son:*

$$E = 45,0, \quad \nu = 0,2, \quad \phi = 20,0^\circ, \quad Y = 0,05, \quad H = 0$$

y se consideran los ángulos de dilatancia $\psi = 15^\circ$, $\psi = 0^\circ$ y $\psi = -3^\circ$. En la figura 5.31 se muestra la curva $\tau_{xy} - \gamma_{xy}$ obtenida para cada valor de la dilatancia. De esta curva es de destacar que a pesar de que el material no tiene endurecimiento, la respuesta tensión deformación puede presentar

endurecimiento o ablandamiento. Este resultado es debido a que el ensayo se realiza imponiendo la condición de isocoricidad y se impiden por tanto los cambios de volumen debidos a la dilatación.

Ejemplo 5.3 *En este ejemplo se analiza el ensayo de corte puro (sin restricción isocórica). El objeto es mostrar que el valor de la tensión límite depende fuertemente del estado de tensiones inicial. Se considera un material con las siguientes propiedades mecánicas:*

$$E = 45,0, \quad \nu = 0,2, \quad \phi = 43,0^\circ, \quad Y = 1,0, \quad H = 0$$

y ángulo de dilatación $\psi = 15^\circ$. Como estados tensionales iniciales se toman:

- Estado A: $\sigma_{xx} = -2,5 \cdot 10^{-1}$, $\sigma_{yy} = -1$, $\sigma_{zz} = -2,5 \cdot 10^{-1}$
- Estado B: $\sigma_{xx} = -5 \cdot 10^{-1}$, $\sigma_{yy} = -2$, $\sigma_{zz} = -5 \cdot 10^{-1}$

Para imponer estos estados se ha aplicado la carga correspondiente a los estados iniciales en un primer paso elástico. A continuación en un segundo paso se imponen los desplazamientos correspondientes al estado de corte puro, manteniendo las cargas aplicadas en el paso anterior.

La respuesta τ_{xy} - γ_{xy} se muestra en la figura 5.32. Como se puede comprobar se alcanza una tensión tangencial límite con el estado inicial B que es un 81 % superior a la obtenida con el estado A.

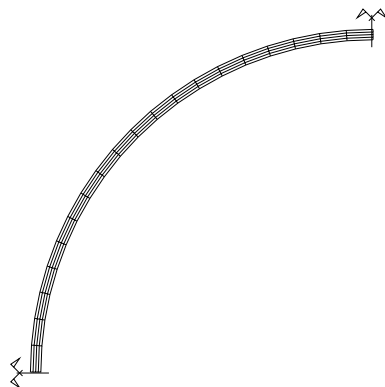


Figura 5.29: Arco semicircular. Malla de elementos finitos

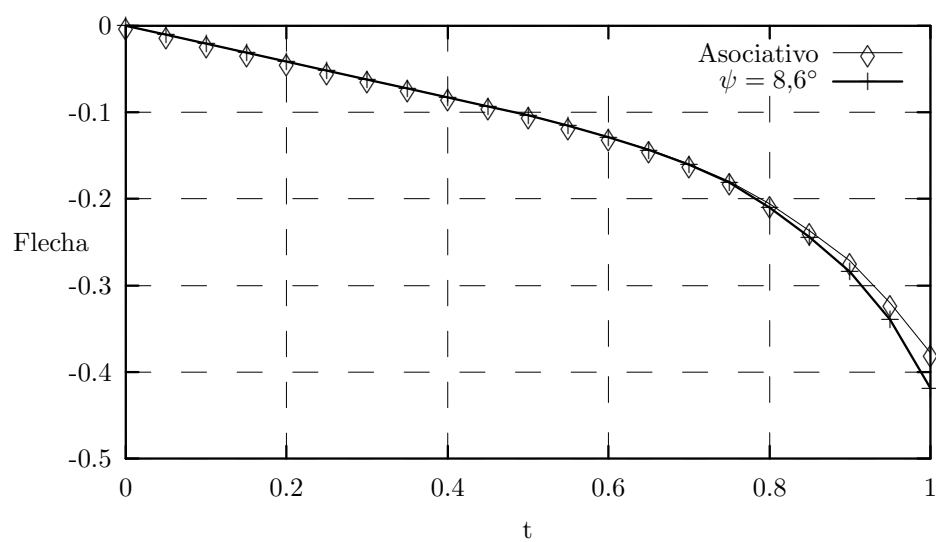


Figura 5.30: Flecha de un arco semicircular sometido a peso propio. Modelos de Drucker-Prager asociativo y no asociativo

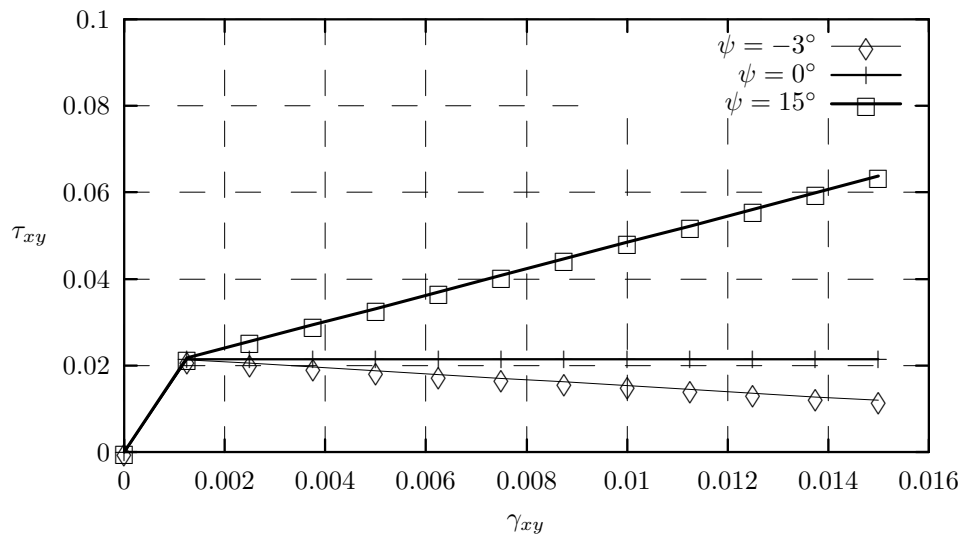


Figura 5.31: *Ensayo de corte simple. Influencia del ángulo de dilatación en la respuesta τ_{xy} - γ_{xy}*

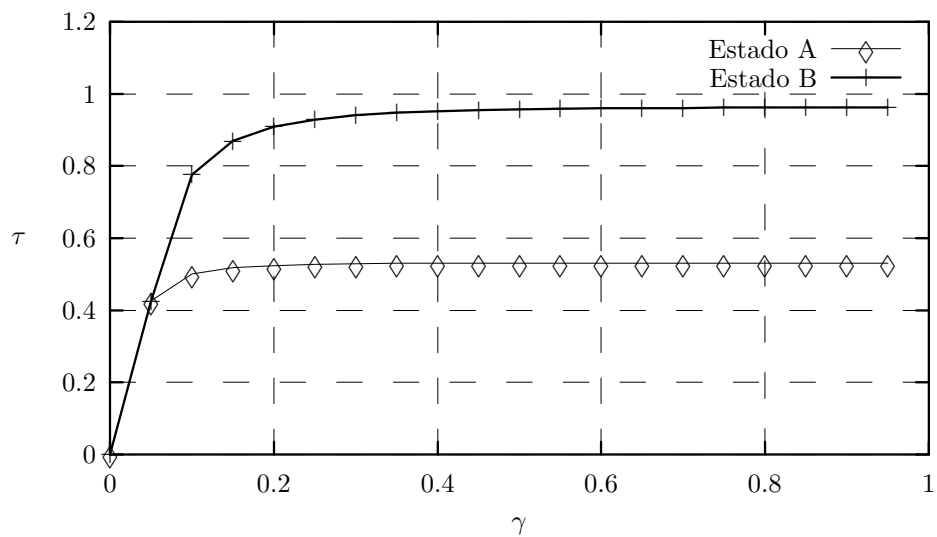


Figura 5.32: *Ensayo de corte puro con tensiones iniciales. Carga límite*

5.3.4. Fenómenos de localización de deformaciones

El mecanismo de formación de bandas en las que se localizan las deformaciones de corte es distinto según el material que se considere, aunque en todos los casos está asociado a inestabilidades en el comportamiento inelástico del sólido. En suelos, los deslizamientos intergranulares se comportan como pequeñas bandas de deformación que coalescen para formar una línea de deslizamiento claramente definida. En rocas y hormigones el fenómeno de iniciación y coalescencia es la formación de microfisuras que evolucionan dando lugar a fisuras macroscópicas de acuerdo con las teorías de la mecánica de la fractura.

Los primeros estudios de localización en materiales friccionales de Mohr-Coulomb se deben a Mandel ([Kravtchenko y Sirieysj, 1964](#)), que establece la expresión del módulo de endurecimiento crítico en función de los ángulos de rozamiento y dilatancia. Posteriormente en ([Rudnicki y Rice, 1975](#)) se presenta un estudio similar para materiales rocosos, empleando modelos de Drucker-Prager. En este trabajo establecen que en modelos no asociativos la localización se puede presentar incluso en materiales con endurecimiento. A continuación en ([Vardoulakis, 1980](#)) se generalizan los resultados de Mandel empleando modelos de Mohr-Coulomb, y se establece la metodología de cálculo de las direcciones de las bandas de localización.

En este trabajo se presentan diversos ejemplos de localización en materiales cohesivo-friccionales empleando modelos constitutivos de Drucker-Prager. Para ello se aprovecha el hecho de que la dilatancia provoca una disminución de la tensión efectiva que conduce a una disminución de la capacidad desviadora del material, favoreciendo la localización de las deformaciones. El objeto es mostrar las prestaciones de los elementos de deformaciones supuestas, cuya formulación se ha descrito en el capítulo 2, para capturar dichas bandas. Los modelos de continuo empleados son modelos locales. Una limitación de esta formulación es que el ancho de la banda no está definido en el modelo y en ausencia de efectos térmicos o dinámicos, como es el caso, el ancho queda determinado por el tamaño de los elementos.

5.3.5. Ejemplos

Ensayos de compresión y de tracción

El objetivo de este ejemplo es analizar la respuesta del modelo para distintos estados de carga en los que se alcanza el colapso estructural de una probeta. Para ello se evalúa la evolución de la raíz del segundo invariante del tensor desviador de tensiones $\sqrt{J_2}$ frente a la presión p , y la curva Fuerza-Parámetro de carga $F-t$. Se consideran los casos en los que el modelo elastoplástico es asociativo ($\psi = \phi$) y no asociativo con $\psi = 5^\circ$. La probeta tiene forma cuadrada con la hipótesis correspondiente a deformación plana, para los estados de carga de tracción, compresión y tracción-compresión que se describirán más adelante.

Dichas cargas se aplican con desplazamientos impuestos. Las características mecánicas son:

$$\frac{E}{Y} = 120; \quad \frac{H}{Y} = -5; \quad \nu = 0,2; \quad \phi = 15^\circ \quad (5.56)$$

Compresión uniaxial

En este estado los desplazamientos se aplican sólo en una dirección, en sentido de compresión. Las figuras 5.33 y 5.34 muestran la evolución de $\sqrt{J_2}$ frente a p , y de la fuerza F_v en la dirección de carga frente al factor de carga t (proporcional al desplazamiento impuesto), respectivamente.

En ambas se ha indicado el punto A en que comienza el flujo plástico. Entre el punto A y B aumentan las tensiones desviadoras y la presión, hasta alcanzar la probeta en B la máxima capacidad resistente (máximo de la fuerza aplicada).

En la rama post-pico hay un tramo, a partir del punto B y hasta el punto C , que disminuye la capacidad desviadora de la probeta y aumenta la presión. A partir del punto C disminuyen tanto $\sqrt{J_2}$ como la presión. En este tramo la probeta va perdiendo su capacidad resistente hasta volver al origen de los ejes p - $\sqrt{J_2}$, instante en el que la fuerza aplicada se anula. Puede observarse en la figura 5.34 que en el caso no asociativo disminuye el valor de la carga límite.

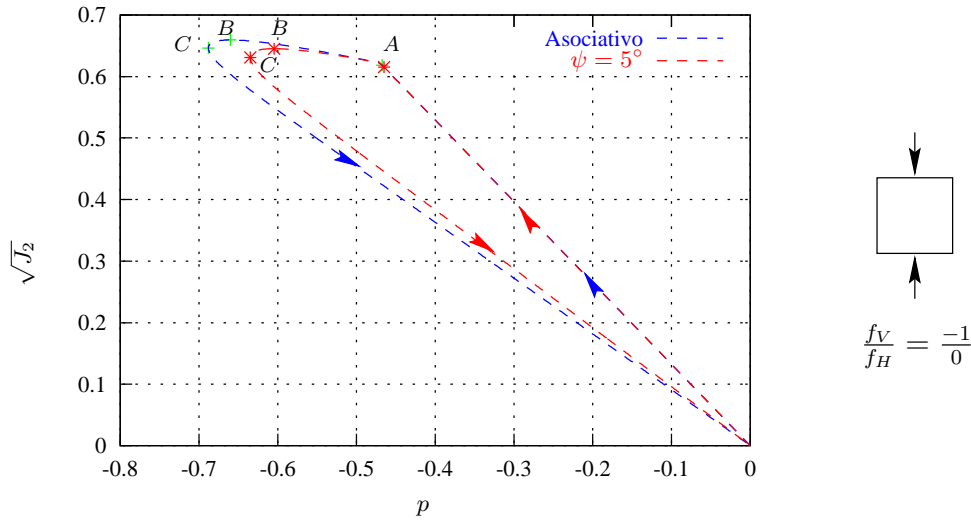


Figura 5.33: *Compresión uniaxial. Trayectoria de tensiones*

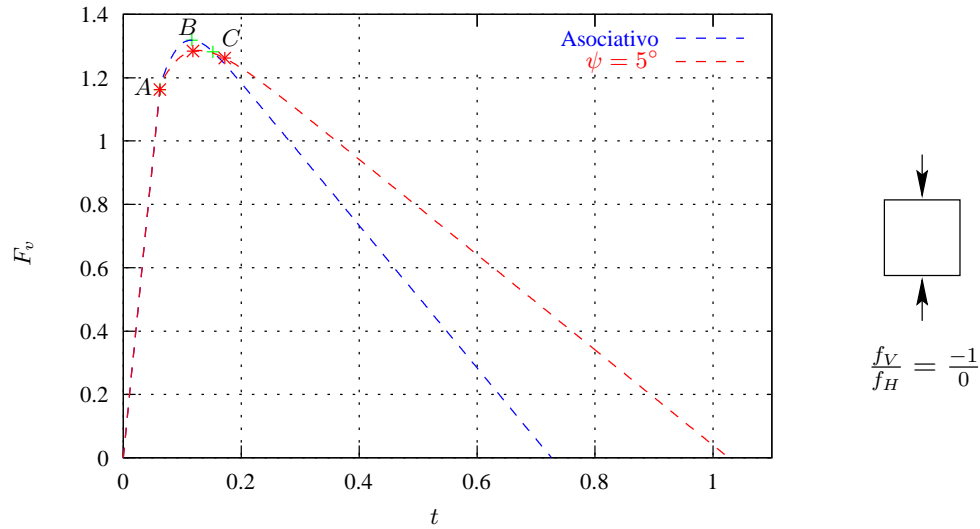


Figura 5.34: *Compresión uniaxial. Curva Fuerza-Parámetro de carga*

Tracción uniaxial

En este caso se analiza el colapso de la probeta en tracción uniaxial. Las figuras 5.35 y 5.36 muestran respectivamente para este caso, la evolución de $\sqrt{J_2}$ frente a p , y la de la fuerza F_v (en dirección de los desplazamientos impuestos) frente al factor de carga t (proporcional al desplazamiento impuesto).

En el punto A comienza el flujo plástico y en ese instante se alcanza el máximo de la fuerza aplicada (en el ensayo de compresión el máximo se alcanza con posterioridad al inicio de la plasticidad). Entre el punto A y B disminuye la capacidad desviadora y aumenta la presión en la probeta hasta alcanzar su máximo en el punto B . A partir de B disminuye J_2 y la presión hasta retornar al origen, instante en el cual la fuerza aplicada se anula.

Al contrario de lo que sucedía en el ensayo de compresión, la carga límite no depende del valor de la dilatancia.

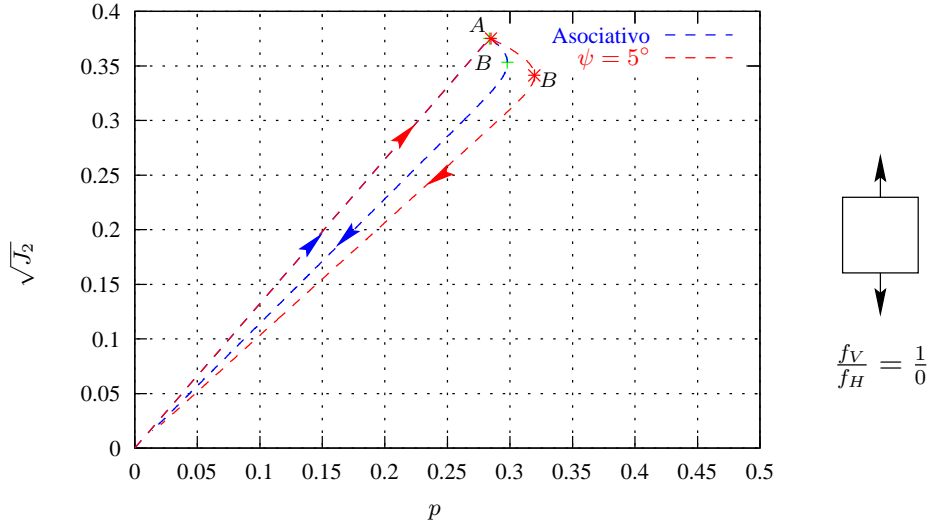


Figura 5.35: *Tracción uniaxial. Trayectoria de tensiones*

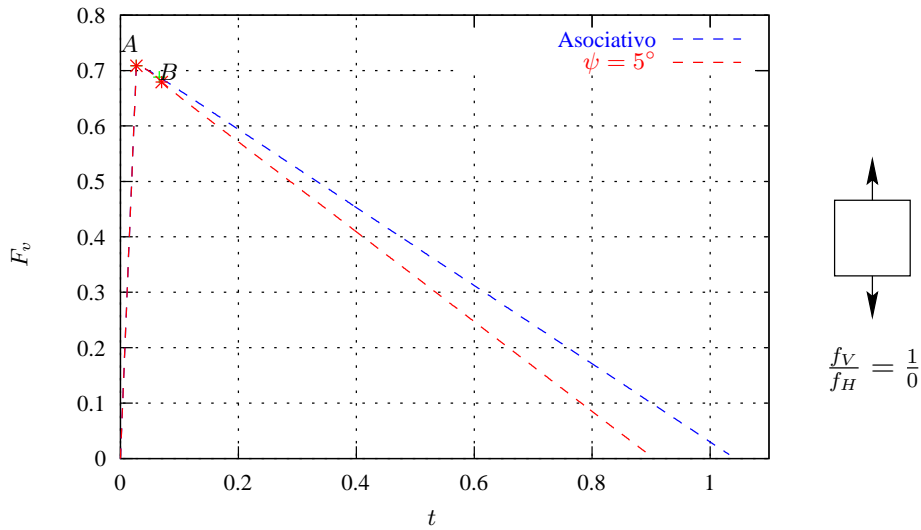


Figura 5.36: *Tracción uniaxial. Curva Fuerza-Parámetro de carga*

Tracción-Compresión biaxial

En este caso se imponen los desplazamientos en dos direcciones paralelas a los lados del elemento. Las figuras 5.37 y 5.38 vuelven a mostrar la evolución de $\sqrt{J_2}$ frente a p , y la de la fuerza F_v (en dirección de tracción) frente al factor de carga t .

En la figura 5.37 el flujo plástico comienza en el punto A. A partir de A, la trayectoria en el plano p - $\sqrt{J_2}$ es una recta que se dirige hacia el vértice del cono de Drucker-Prager (que en este caso está regularizado con un casquete esférico), disminuyendo la capacidad desviadora y aumentando la presión hasta llegar a B. En el tramo AB de la figura 5.38, la fuerza aplicada aumenta

linealmente. Al alcanzar el punto B , la probeta colapsa y la fuerza aplicada alcanza un valor constante. En el plano $p-\sqrt{J_2}$ (figura 5.37), el punto B es un “atractor” de la trayectoria: la probeta alcanza la rotura y mientras aumentan los desplazamientos impuestos la capacidad desviadora se mantiene nula y se llega a una presión residual que permanece constante.

En este caso el valor de la dilatancia no influye en la forma de la trayectoria en el plano $p-\sqrt{J_2}$, ni en el valor de la carga límite. La dilatancia únicamente produce un aumento de rigidez de la probeta entre el comienzo del flujo plástico y el colapso, que hace que este se alcance con un valor de los desplazamiento impuestos que es menor en el caso no asociativo.

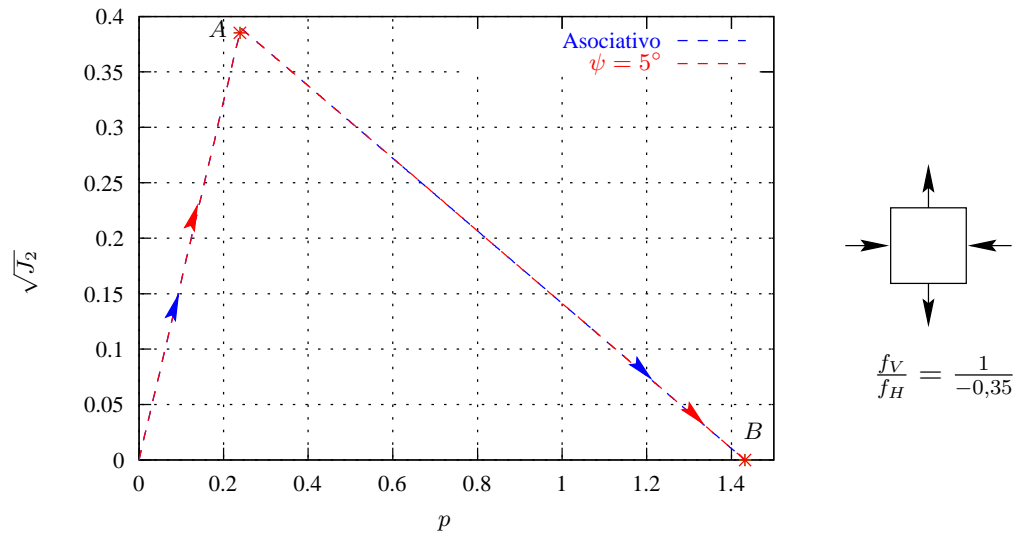


Figura 5.37: *Compresión-Tracción biaxial. Trayectoria de tensiones*

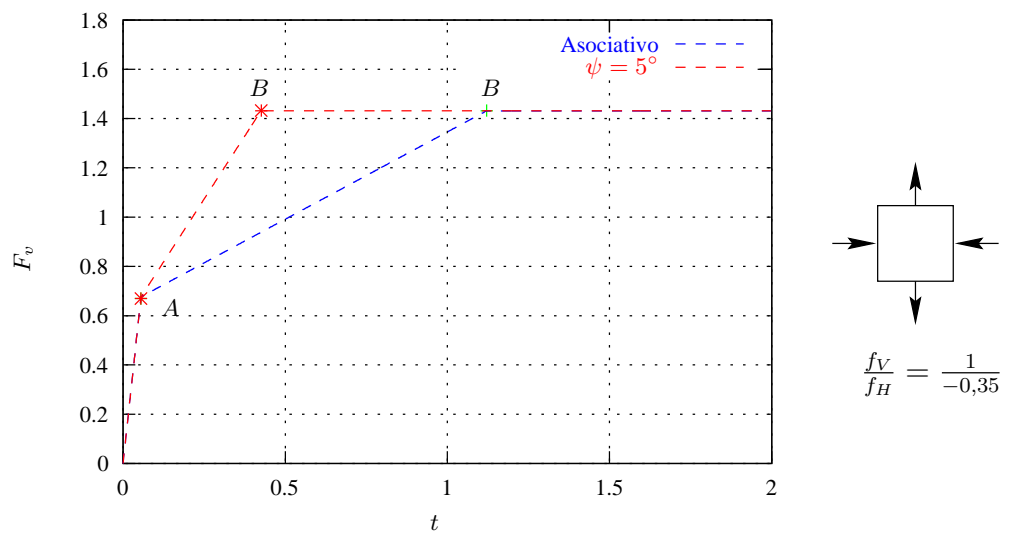


Figura 5.38: *Compresión-Tracción biaxial. Curva Fuerza-Parámetro de carga*

Estabilidad de un talud vertical

En este ejemplo y en los siguientes se examina la capacidad de los elementos con deformaciones mejoradas supuestas para capturar bandas de localización de deformaciones en problemas típicos de la mecánica de suelos, en los que de alguna manera se alcanza un mecanismo de rotura. La complejidad del comportamiento de este tipo de materiales requiere de modelos constitutivos complejos y más elaborados que el utilizado en este trabajo. No obstante y como ya se ha indicado, el objetivo de estos ejemplos es únicamente evaluar las prestaciones de los elementos mejorados para predecir el mecanismo de colapso. El modelo constitutivo empleado en estos ejemplos es el modelo modificado de Drucker-Prager propuesto en (Leroy y Ortiz, 1989).

Se considera un talud vertical cuyas dimensiones son $12 \text{ m} \times 12 \text{ m}$. El peso específico es 10000 N/m^3 , y se aplica de manera linealmente creciente. Las condiciones de contorno consideradas impiden todos los desplazamientos en el borde horizontal inferior, y los desplazamientos horizontales en el borde vertical derecho.

Las características mecánicas del suelo son las adoptadas en (Leroy y Ortiz, 1989):

$$E = 2 \cdot 10^8 \text{ Pa} \quad (5.57)$$

$$\nu = 0,25 \quad (5.58)$$

$$\phi = 20^\circ \text{ (constante)} \quad (5.59)$$

$$P_0 = 5494,95 \text{ Pa} \quad (5.60)$$

siendo P_0 la presión cohesiva: $c = P_0 \tan \phi$. El ángulo de dilatación es $\psi = 10^\circ$ resultando el flujo plástico no incompresible. De esta manera no aparece bloqueo de la malla por condiciones de cuasi-incompresibilidad, y por tanto en el análisis se pueden emplear elementos isoparamétricos.

Se consideran tres mallas estructuradas de 10×10 , 20×20 y 30×30 elementos. Estas mallas se muestran en la figura 5.39.

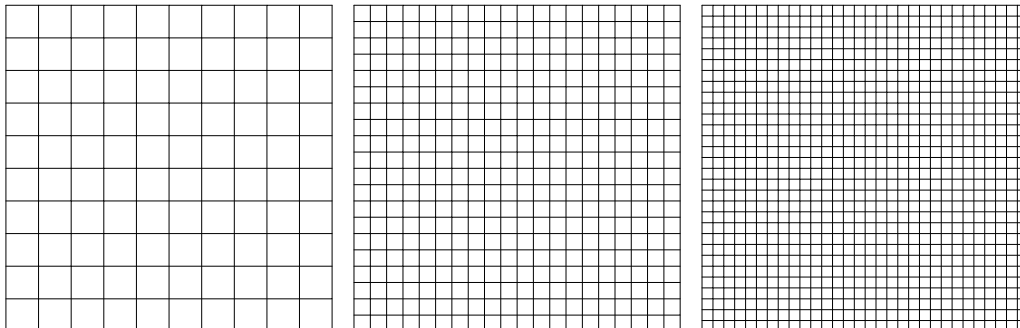


Figura 5.39: Talud a 90° . Mallas empleadas

En la modelización se han empleado elementos con formulación en desplazamientos $Q4$, y elementos mejorados $Q1/E4$. En primer lugar es de destacar

que con los elementos $Q4$, las mallas de 10×10 y 20×20 no capturan el mecanismo de fallo del talud. Las figura 5.40 muestra las deformadas obtenidas para un factor de carga 0,3, concluyéndose que los resultados con los elementos $Q4$ no son admisibles para representar la rotura del talud.

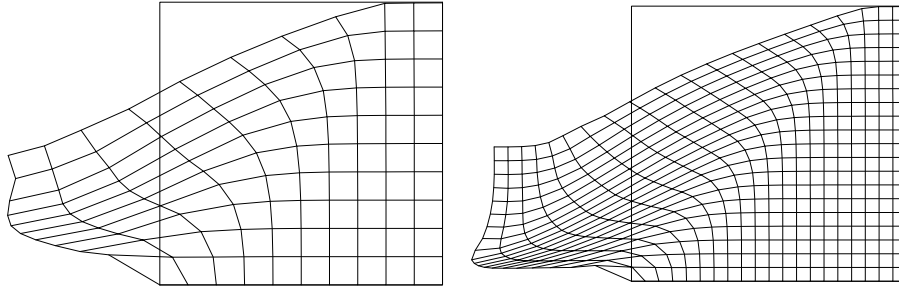


Figura 5.40: Talud a 90° . Elementos formulados en desplazamientos

Con los elementos mejorados la banda de rotura se captura nítidamente con las tres mallas, para un factor de carga próximo a 0,18, tal como se muestra en la figura 5.41. En esta figura el factor de magnificación es 2.

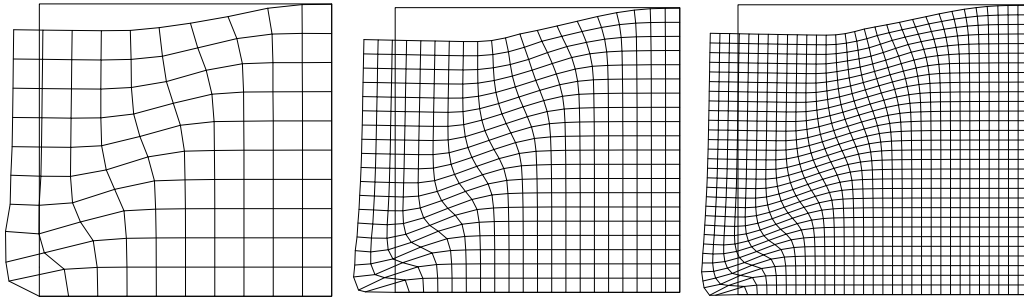


Figura 5.41: Talud a 90° . Deformadas con los elementos mejorados

Con elementos formulados en desplazamientos la malla de 900 elementos alcanza un factor de carga similar, pero el mecanismo de rotura es muy difuso. En la figura 5.42 se muestra la deformada, con un factor de magnificación 100 y los contornos de deformación plástica obtenidos con dichos elementos.

Este hecho también queda de manifiesto en las figuras 5.43 y 5.44 en las cual se muestran el desplazamiento vertical de la esquina superior izquierda, y los perfiles de deformación plástica efectiva en una sección horizontal a media altura, respectivamente.

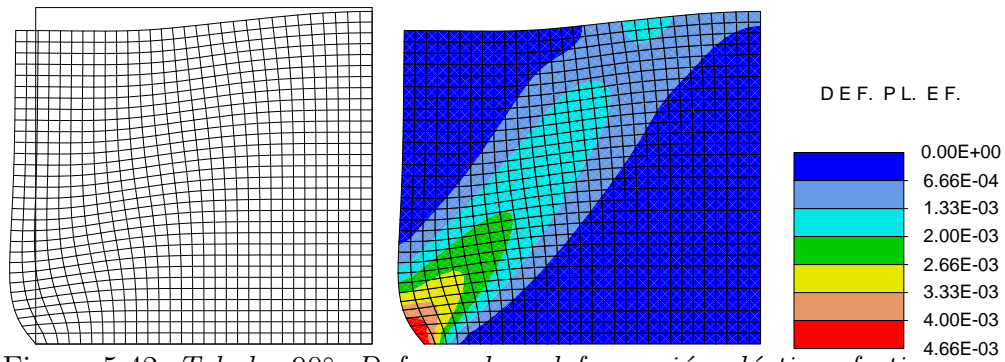


Figura 5.42: Talud a 90° . Deformada y deformación plástica efectiva para la malla de 900 elementos Q4

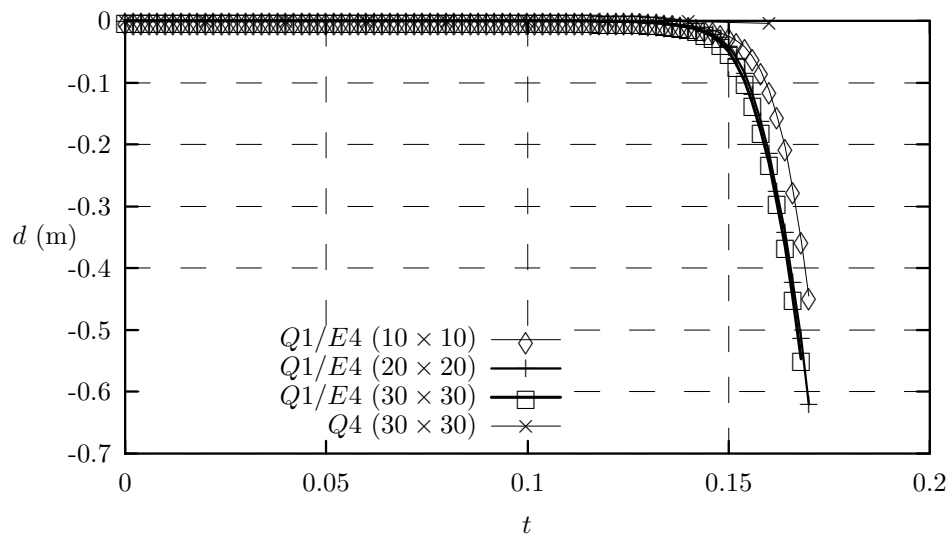


Figura 5.43: Talud a 90° . Desplazamiento de la esquina superior izquierda

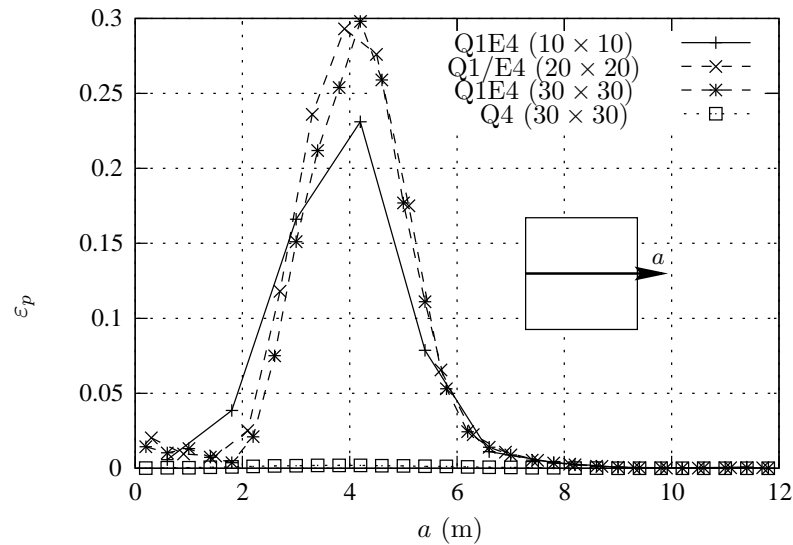


Figura 5.44: Talud a 90°. Perfiles de deformación plástica efectiva

En la figura 5.45 se recogen los contornos de deformación plástica efectiva y los vectores de desplazamiento en las mallas de elementos mejorados. El mecanismo de rotura es un deslizamiento relativo, aproximadamente de sólido rígido, entre las dos partes del talud que define la banda de localización de deformaciones.

Estabilidad de un talud a 45°

Este ejemplo es similar al anterior, pero en este caso el talud está inclinado 45°. Se impiden todos los desplazamientos en la base, y los desplazamientos horizontales en el borde vertical. Las características mecánicas son idénticas a las del ejemplo anterior. Se han considerado las tres mallas de 144, 400 y 900 elementos indicadas en la figura 5.46.

En la figura 5.47 se muestran las deformadas obtenidas con cada malla. El factor de magnificación es 3 en todos los casos. Puede observarse que con los elementos formulados en desplazamientos, únicamente se captura el mecanismo de deslizamiento con la malla de 900 elementos.

En la figura 5.48 se muestra el descenso de la esquina superior izquierda del talud, frente al factor de carga. Los máximos valores del peso propio aplicado son del 96 % para las malles de 12 × 12 y 20 × 20 elementos, y del 84 % para la malla de 30 × 30 elementos.

Para comparar los resultados obtenidos con los elementos mejorados y con los elementos con formulación en desplazamientos (que en este ejemplo no se bloquean ya que el flujo plástico no es incompresible), en la figura 5.49 se muestran los perfiles de la deformación plástica a la mitad de la altura del talud. Dichos perfiles corresponden al instante de colapso del talud. Es de destacar que para los elementos con formulación en desplazamientos la carga aplicada es el 100 % del peso propio. Al haber alcanzado este nivel de carga sin que se hayan producido inestabilidades de tipo numérico, se

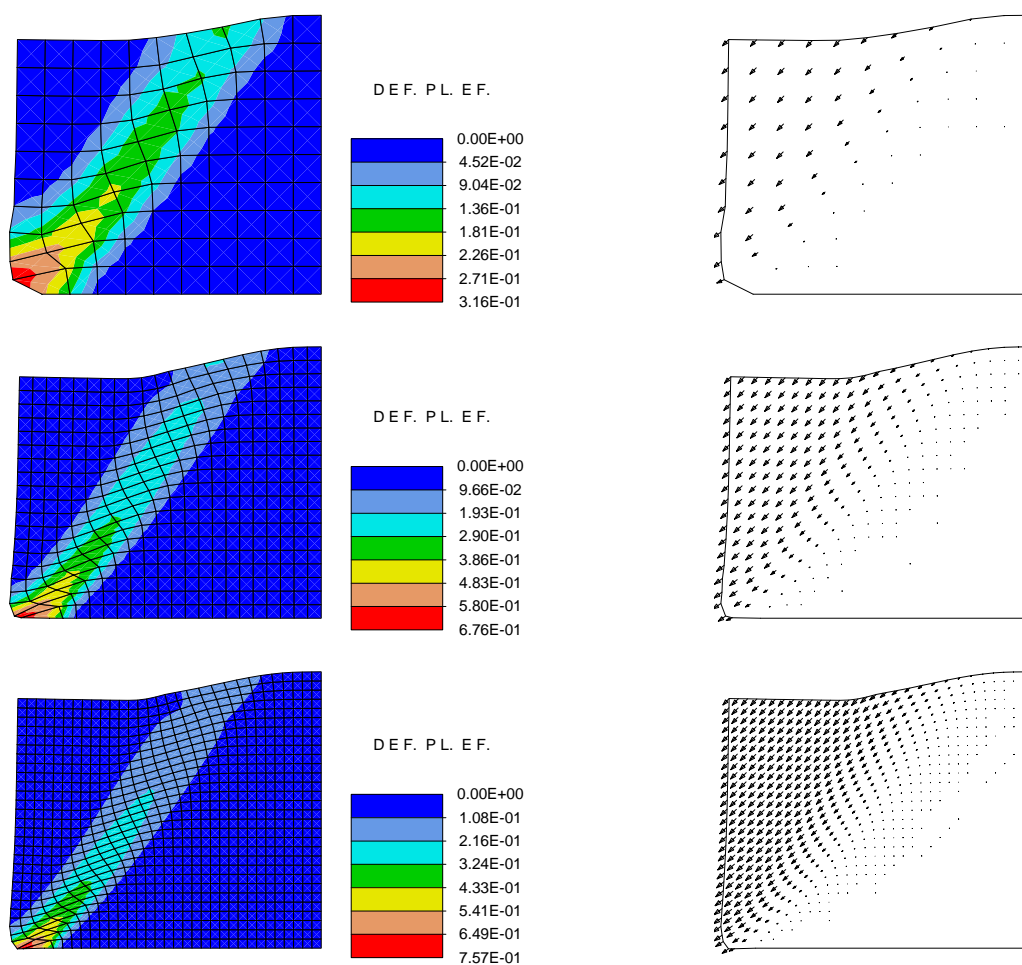


Figura 5.45: Talud a 90° . Deformación plástica efectiva y vectores de desplazamiento

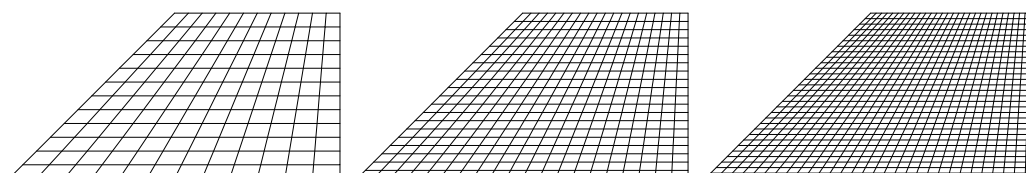
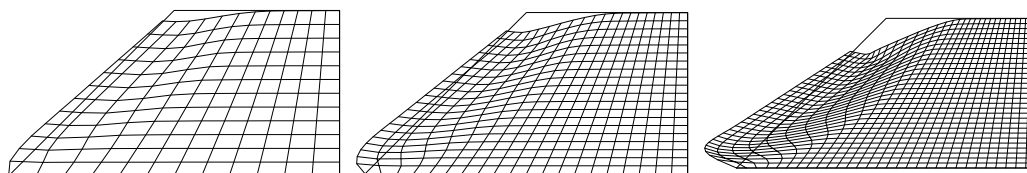
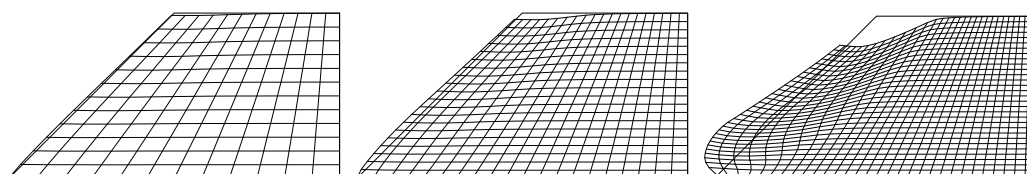


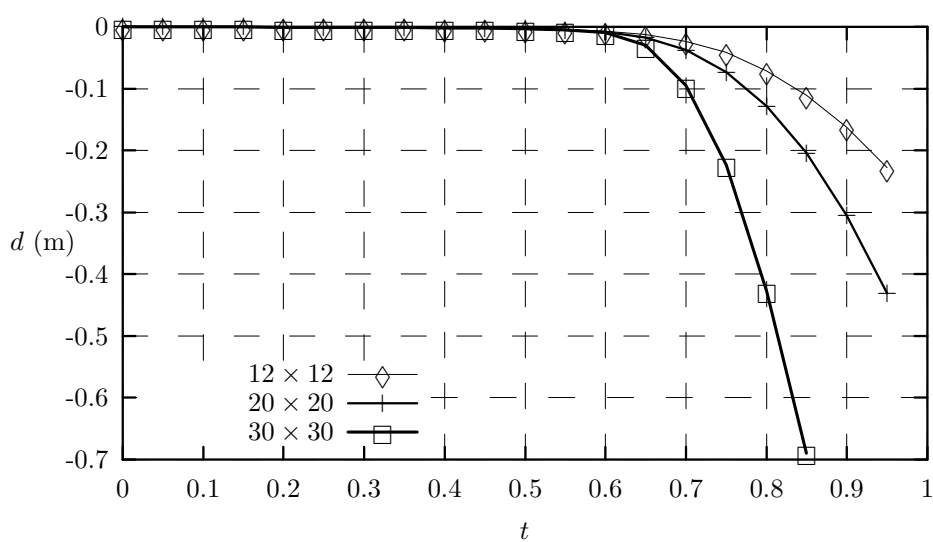
Figura 5.46: Talud a 45° . Mallas empleadas



Elementos mejorados



Elementos en desplazamientos

Figura 5.47: *Talud a 45°. Deformadas*Figura 5.48: *Talud a 45°. Desplazamiento de la esquina superior izquierda*

puede concluir que no se ha llegado a la rotura del talud. La distribución de deformaciones plásticas con los elementos en desplazamientos es muy difusa salvo en la malla más fina. Aún así en esta malla se obtiene una banda más ancha que con los elementos mejorados y un valor de las deformaciones plásticas algo menor, a pesar de que actúa un peso que es un 20 % superior.

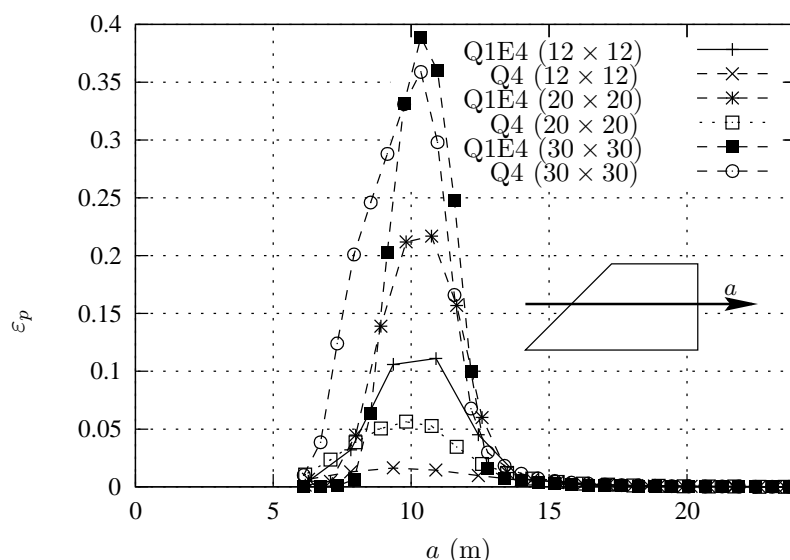


Figura 5.49: Talud a 45°. Perfiles de deformación plástica efectiva

Por último, en la figura 5.50 se muestran los contornos de deformación plástica efectiva y los vectores de desplazamientos. La deformación plástica efectiva se concentra en una banda curva. Los vectores de desplazamientos corroboran que el mecanismo de colapso corresponde de manera aproximada al movimiento relativo de sólido rígido entre las dos partes separadas por la banda de localización.

Carga de hundimiento de una zapata rígida con carga centrada

En este apartado se modeliza un problema clásico de mecánica de suelos, que corresponde a una capa de suelo sometida a la presión de una zapata rígida, con carga centrada. Las dimensiones y condiciones de contorno se muestran en la figura 5.51.

Al existir un eje de simetría vertical se analiza únicamente la mitad del modelo, empleando las dos mallas de la figura 5.52 que tienen 20×20 y 40×40 elementos con deformaciones supuestas, respectivamente. Asimismo se considera impedido el desplazamiento relativo zapata-suelo, lo que equivale a suponer un rozamiento infinito en la interfase de ambos.

Este problema lo han analizado (Zienkiewicz et al., 1995) empleando técnicas de remallaje adaptativo para capturar las bandas de localización, y (Manzoli, 1998) en el contexto de los modelos con discontinuidades fuertes. En estas referencias el comportamiento del suelo se supone no drenado. En tal caso, la deformación volumétrica está controlada por la compresibilidad

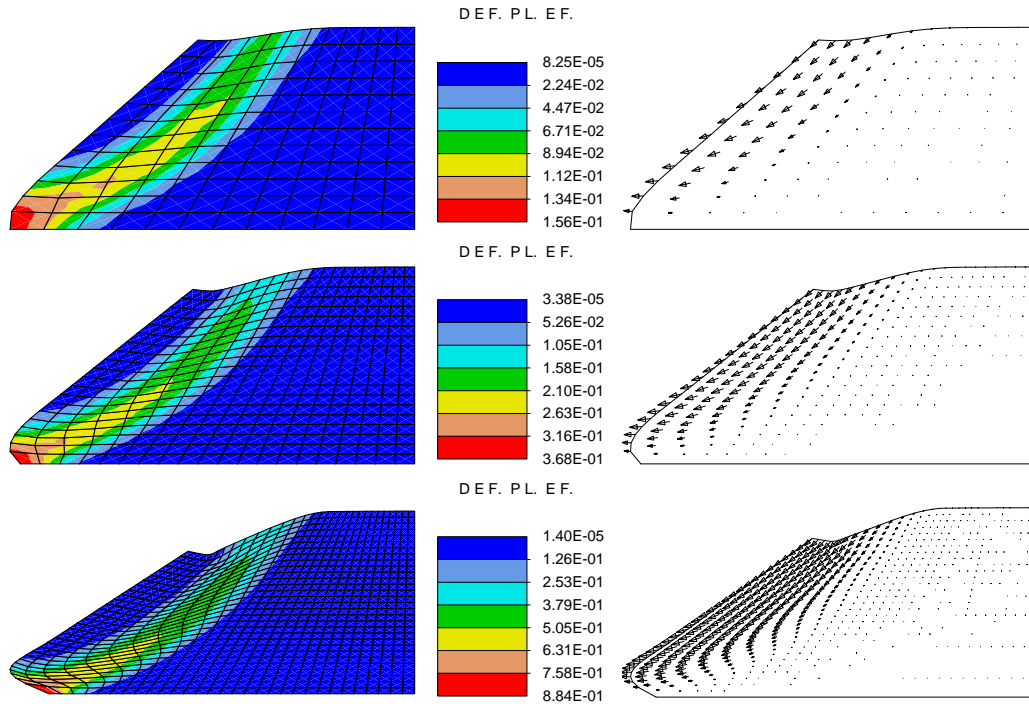


Figura 5.50: Talud a 45° . Deformación plástica efectiva y vectores de desplazamiento

del fluido que hay en los poros del suelo. Si este valor es muy pequeño las deformaciones se producen a volumen constante, y suponiendo que el módulo de compresibilidad del suelo (sin líquido) es pequeño comparado con el del fluido, el comportamiento del material se puede representar con el modelo de Von-Mises (Chen y Saleeb, 1982; Zienkiewicz et al., 1998).

En este trabajo se analizan dos casos: el caso de suelo sin drenaje descrito, y el correspondiente a emplear el modelo no asociativo de Drucker-Prager utilizado en los anteriores ejemplos de este apartado.

En ambos, para representar el comportamiento elástico del suelo se toma $E = 1,0$ GPa. y $\nu = 0,45$. La zapata se supone un material elástico cuyo módulo de Young es cuatro ordenes de magnitud superior al del suelo.

El comportamiento del suelo no drenado en régimen plástico se modeliza con el criterio de Von-Mises, siendo la tensión de fluencia $Y = 1,0$ MPa. y el módulo de endurecimiento nulo. Las dimensiones de la malla son la que resultan de sustituir $a = 2$ en la figura 5.51.

Las figuras 5.53 y 5.54 muestran los resultados obtenidos, para el caso de suelo no drenado, con las dos mallas de elementos mejorados consideradas. Las deformadas tienen un factor de magnificación 10. En cada una de las esquinas de la zapata se forman sendas líneas de deslizamiento, que se cortan en el eje de simetría, y definen una cuña triangular. A su vez existen otras dos líneas de deslizamiento que junto con las primeras definen dos cuñas de suelo a los lados de la zapata.

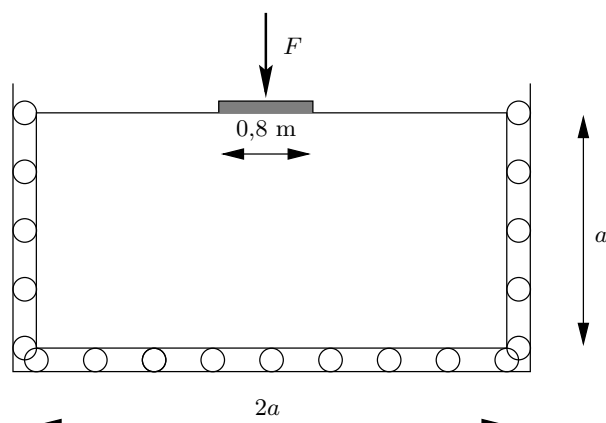


Figura 5.51: Zapata rígida con carga centrada. Dimensiones del modelo

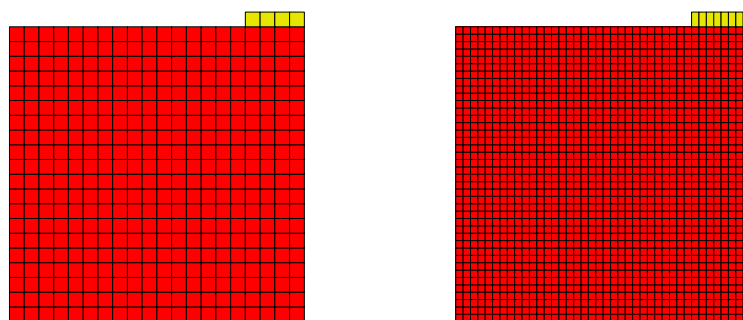


Figura 5.52: Zapata rígida con carga centrada. Mallas empleadas en los análisis

El mecanismo de rotura se ve claramente con el detalle de los vectores desplazamiento. La cuña triangular situada bajo la zapata se desplaza verticalmente provocando la expulsión de las cuñas laterales, que deslizan según las líneas de deslizamiento sobre la capa adyacente de suelo, sin que esta última apenas se deforme. En estas cuñas laterales a su vez se distinguen dos partes: una en la cual las partículas de suelo fluyen describiendo trayectorias curvas hasta alcanzar otra (con forma de triángulo) en la cual tienen trayectoria rectilínea.

Por último, en la figura 5.55 se muestra la curva fuerza-desplazamiento, comparando los valores obtenidos en el modelo con la solución analítica propuesta por Prandtl en 1921. Como puede comprobarse, los resultados obtenidos mediante elementos finitos alcanzan la rama horizontal correspondiente a la carga límite, cuyo valor es muy parecido al obtenido analíticamente.

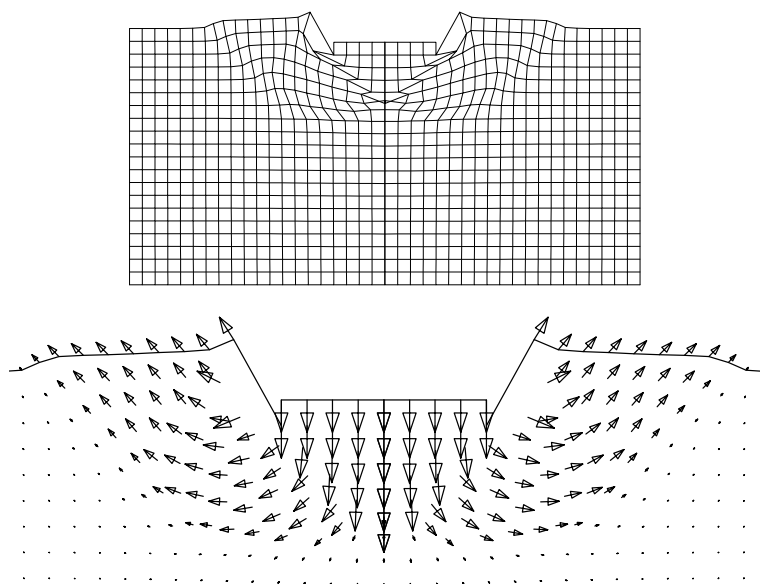


Figura 5.53: *Deformada y vectores desplazamiento. Malla de 400 elementos Q1/E4. Modelo de Von Mises*

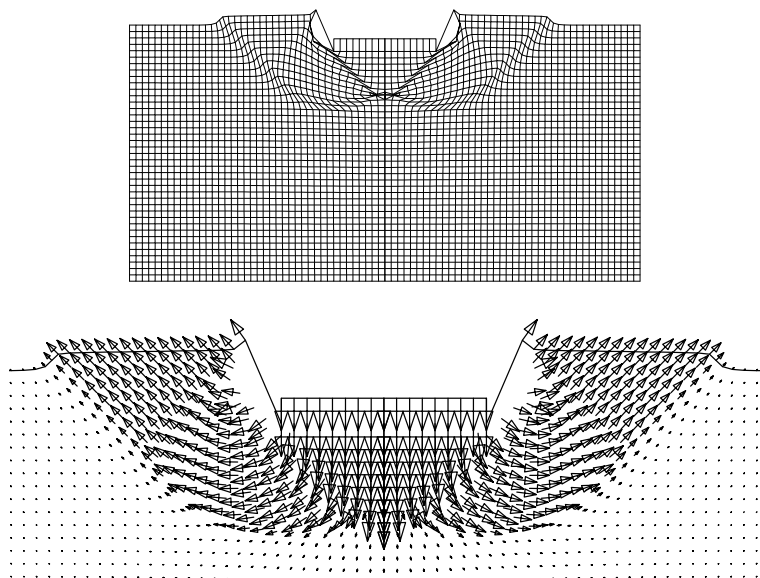


Figura 5.54: *Deformada y vectores desplazamiento. Malla de 1600 elementos Q1/E4. Modelo de Von Mises*

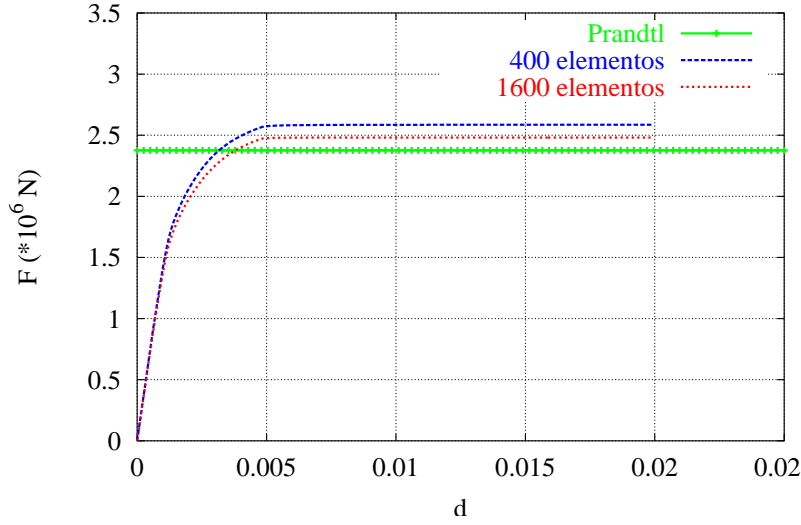


Figura 5.55: Zapata con carga centrada. Curva Fuerza-desplazamiento. Modelo de Von Mises.

Con el modelo de Drucker-Prager se representa el comportamiento del suelo de manera que el flujo plástico es no asociativo. Los valores adoptados son:

$$P = 0,961 \text{ MPa} \quad (5.61)$$

$$\phi_0 = 20^\circ \quad (5.62)$$

$$\psi = 5^\circ \quad (5.63)$$

Con objeto de que se desarrollen las bandas de localización, se supone la ley de “ablandamiento” del ángulo de rozamiento interno en función de la deformación plástica efectiva ε^p :

$$\phi = \phi_0 + (\phi_\infty - \phi_0) \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon^p}{\varepsilon_{\text{sat}}^p} - 1 \right)^2} \quad (5.64)$$

con $\phi_\infty = 10^\circ$ y $\varepsilon_{\text{sat}}^p = 0,05$. Las dimensiones de la malla en este caso corresponden a un valor de $a = 4$ en la figura 5.51. Los resultados obtenidos con el modelo de Drucker-Prager están en la figura 5.56 para cada una de las mallas. En esta figura se ve que el mecanismo de rotura es similar al caso de suelo no drenado, pero existen algunas diferencias. En este caso la cuña central expulsa a las laterales, pero en estas se distinguen tres partes en las que el flujo de las partículas de suelo son rectilíneas. Al igual que en el caso no drenado, fuera de las cuñas el suelo apenas se deforma. Por otra parte, en este caso la masa de suelo movilizadado en la rotura es mucho mayor que en el caso no drenado, razón por la que ha sido necesario duplicar las dimensiones del modelo.

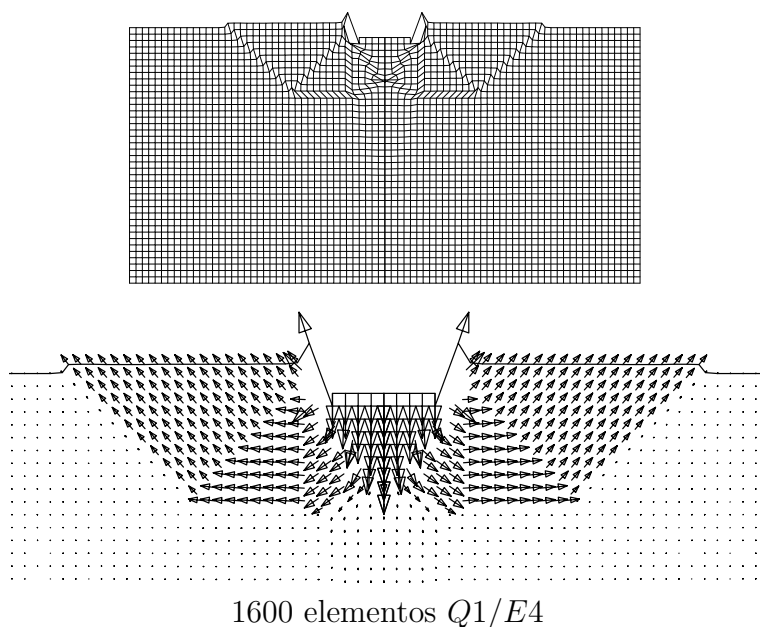
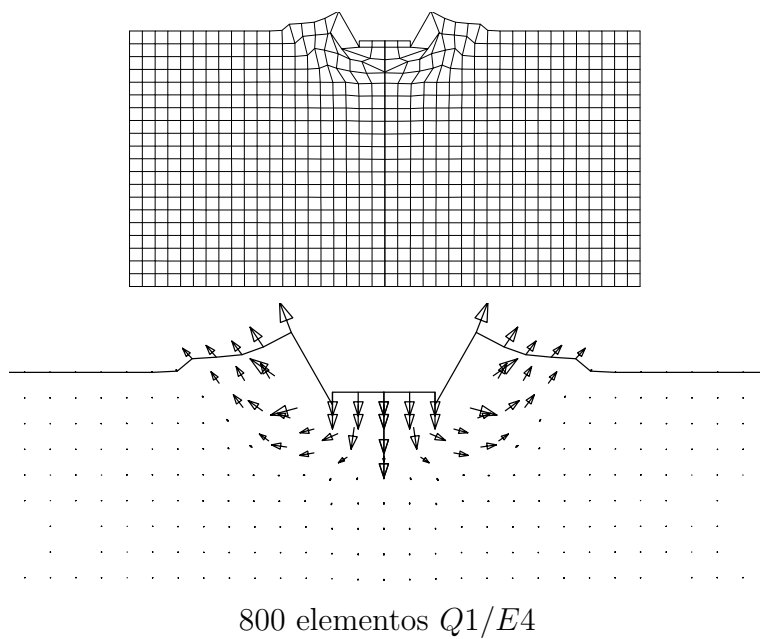


Figura 5.56: *Deformada y vectores desplazamiento. Modelo de Drucker-Prager*

Finalmente, en la figura 5.57 se muestra la curva Fuerza-Desplazamiento calculada por elementos finitos frente a la carga de hundimiento de Prandtl para suelos con ángulo de rozamiento no nulo (Salas et al., 1981), que se representa con una recta horizontal. En la curva obtenida en el cálculo se alcanza un máximo (carga de hundimiento) seguido de una rama descendente hasta llegar a un valor residual de la carga. Esta forma es típica de la “rotura por corte generalizado” (Terzaghi, 1943), en la que aparecen una o varias superficies de deslizamiento. El hundimiento viene acompañado por la aparición de líneas de rotura en la superficie y por la elevación del terreno exterior a la cimentación. Esta forma de rotura es propia de las cimentaciones someras en arenas densas (Salas et al., 1981). Como puede observarse, el valor de la carga de hundimiento calculado se ajusta adecuadamente al de Prandtl, siendo ligeramente inferior.

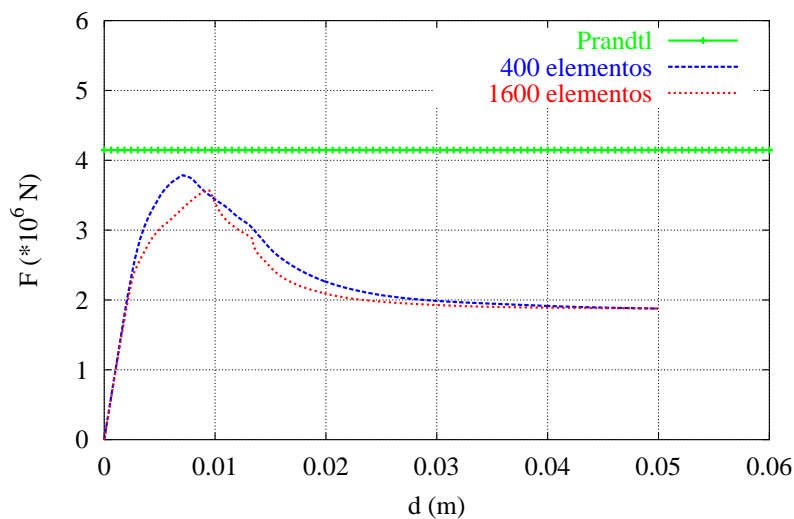


Figura 5.57: Zapata con carga centrada. Curva Fuerza-desplazamiento. Modelo de Drucker-Prager

5.3.6. Conclusiones

En este apartado se han empleado los elementos de deformaciones mejoradas supuestas en el contexto de los modelos elastoplásticos no asociativos de Drucker-Prager. Se han analizado ejemplos académicos que ponen de relevancia los efectos de la no asociatividad, ensayos simples para investigar el comportamiento en tracción-compresión y la influencia de la dilatación analizando las trayectorias de las tensiones, y por último algunos ejemplos más completos de la mecánica de suelos: estabilidad de taludes y cargas de hundimiento. De los ejemplos analizados en este apartado se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. Los elementos con deformaciones mejoradas supuestas capturan las bandas de localización en modelos no asociativos como el empleado en este trabajo, con prestaciones comparables a los elementos formulados específicamente con este fin.
2. A pesar de emplear un modelo continuo local, con la limitación de que el ancho de la banda depende del tamaño de los elementos, estos elementos permiten reproducir adecuadamente los mecanismos de rotura en problemas clásicos de la mecánica de suelos.
3. Las prestaciones de los elementos en cuanto a robustez es similar en los modelos elastoplásticos asociativos y en los no asociativos.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se han investigado las prestaciones de los elementos de deformaciones mejoradas supuestas (Simó y Rifai, 1990; Simó y Armero, 1993; Simó et al., 1993a; Armero y Glaser, 1997), en el contexto de los medios continuos elastoplásticos. Aunque se ha estructurado de manera que al principio de cada capítulo se hace un resumen del mismo y al final se exponen algunas de las conclusiones extraídas, es conveniente recapitular aquí los trabajos desarrollados a lo largo de la tesis y las conclusiones más relevantes de la misma. Asimismo en este último capítulo se describen las principales aportaciones realizadas y las líneas de investigación que quedan abiertas a futuros trabajos.

6.1. Resumen del trabajo realizado

Con el fin de alcanzar los objetivos planteados en el capítulo 1, a lo largo de la tesis se han desarrollado los siguientes trabajos:

- Estudio pormenorizado de la formulación de los elementos de deformaciones supuestas, para problemas geoméricamente lineales (Simó y Rifai, 1990) y no lineales (Simó y Armero, 1993; Simó et al., 1993a; Armero y Glaser, 1997), realizando un análisis crítico de la influencia de los modos mejorados en la rigidez del elemento mediante análisis espectral, y en el enriquecimiento de su cinemática.
- Implementación en el contexto de los elementos mejorados de un modelo de plasticidad con grandes deformaciones (Garino, 1993). Dicho modelo tiene las siguientes características:
 1. Cinemática basada en la descomposición multiplicativa del gradiente de deformaciones.
 2. Respuesta elástica caracterizada por un modelo hiperelástico
 3. Flujo plástico asociativo
 4. Criterio de fluencia de Von-Mises

5. El modelo constitutivo se implementa empleando variables espaciales y la definición de la cinemática de los elementos (descomposición del gradiente de deformaciones en una parte compatible y una parte mejorada) se hace en la configuración material

Como ejemplo de aplicación de los elementos mejorados y del modelo constitutivo se ha simulado el ensayo de tracción simple con estricción, en probetas cilíndricas.

- Análisis detallado de la relación entre la energía de deformación asociada a los modos mejorados y el error de discretización. Este análisis ha permitido proponer una metodología de estimación de error que es aplicable de forma general a problemas de elasticidad lineal y no lineal, y de plasticidad infinitesimal. En los problemas no lineales el estimador se formula de manera incremental. Además, para el caso elastoplástico, la formulación se realiza a través de la integración variacional de las ecuaciones de la plasticidad ([Ortiz y Stainier, 1998](#)).
- Aplicación de los elementos mejorados, con pequeñas y con grandes deformaciones, a la modelización de fenómenos de localización en materiales metálicos empleando modelos locales. Las prestaciones de los elementos para capturar las bandas se analizan mediante la tasa de segundo orden de la energía interna ([Steinmann y Willam, 1990](#)), utilizando un programa de matemática formal ([Maple, 1991a](#)).
- Aplicación de los elementos mejorados con pequeñas deformaciones a la modelización de fenómenos de localización en materiales cohesivo-friccionales (rocas, suelos, etc.), empleando modelos constitutivos locales no asociativos. El énfasis en este caso es reproducir los mecanismos de rotura en problemas típicos de la mecánica de suelos.

6.2. Conclusiones de la investigación desarrollada

Los trabajos realizados y los resultados obtenidos permiten extraer las siguientes conclusiones:

Elementos de altas prestaciones en problemas de elastoplasticidad con grandes deformaciones.-

La modelización de problemas de *plasticidad con grandes deformaciones* mediante elementos finitos lleva asociada dificultades numéricas entre las que cabe destacar el bloqueo de los elementos, las bajas tasas de convergencia con los consiguientes costes de cálculo, la posible existencia de modos de energía nula que invalidan los resultados obtenidos, etc. Estos problemas

se han resuelto satisfactoriamente con los elementos mejorados y el modelo constitutivo empleado:

1. La formulación de deformaciones supuestas da lugar a elementos que no se bloquean ni en flexión ni en régimen cuasi-incompresible.
2. Como es sabido, el elemento mejorado propuesto inicialmente (Simó y Armero, 1993; Simó et al., 1993a) presenta un modo de energía nula en compresión (Wriggers y Reese, 1996). Posteriormente se hace una reformulación (Armero y Glaser, 1997), implementada en este trabajo, que soluciona este problema. No obstante, cuando hay grandes deformaciones plásticas la regla de integración de cuatro puntos de Gauss sigue dejando subintegrado el elemento (Armero y Glaser, 1997). Es necesario entonces emplear cuadraturas de orden superior (cinco o nueve puntos) que si bien no corrigen completamente el problema de la subintegración, sí que permiten obtener resultados aceptables.
3. El modelo constitutivo presenta las mismas ventajas de eficiencia computacional con los elementos mejorados que la ya demostrada (Garino, 1993) empleando elementos mixtos de presión constante. Esta eficiencia es consecuencia de que se mantiene la actualización multiplicativa del tensor de Finger sin necesidad de calcular explícitamente la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformaciones. La implementación del modelo realizada en este trabajo mantiene las aportaciones originales de García Garino.

Para que la velocidad de convergencia sea adecuada se ha implementado la matriz tangente de manera algorítmicamente consistente.

Un ejemplo detallado, de aplicación del modelo, ha sido el ensayo de tracción simple con estricción. De este ejemplo se concluye que los elementos mejorados proporcionan resultados con los cuales es posible calibrar modelos constitutivos para metales, ya que se ajustan correctamente a los resultados experimentales disponibles (Goicolea, 1985). No obstante, debido a que la distribución de deformaciones plásticas se concentra en el cuello sin que aparezcan bandas de rotura, no tiene ventajas importantes el emplear elementos mejorados frente a otros elementos con formulaciones también adecuadas para abordar el problema (elementos mixtos de presión constante, \overline{B} , etc).

Estimación de error.-

La metodología propuesta para la *estimación del error*, basada en cuantificar la norma energética de los modos mejorados, permite obtener una cota realista del error de discretización de la solución obtenida con elementos formulados en desplazamientos. La formulación del estimador de error es general, y es aplicable a problemas lineales y no lineales: elasticidad no lineal con grandes deformaciones y plasticidad infinitesimal. El error se estima tanto a

nivel local en cada elemento, como a nivel global de toda la malla. La ventaja de este estimador, además de su formulación general válida para problemas lineales y no lineales, es que se formula localmente sin necesidad de resolver el problema de contorno en subdominios, ni de tener que calcular suavizados globales.

Localización.-

A pesar de las dificultades inherentes a la simulación de fenómenos de *localización débil de deformaciones*: elastoplasticidad, discontinuidades en el campo de deformaciones, definición del problema de contorno mal condicionada, etc. los elementos con deformaciones supuestas reproducen las bandas de localización con una eficacia similar a los elementos diseñados específicamente para este tipo de problemas. Además, presentan la ventaja de ser elementos de propósito general: bajo orden de interpolación, libres de bloqueo en problemas cuasi-incompresibles y de flexión, están formulados con variables básicas (desplazamientos y deformaciones) adecuadas para modelos constitutivos elastoplásticos, etc.

6.3. Aportaciones

Las aportaciones principales de esta tesis son las siguientes:

Elementos con deformaciones mejoradas supuestas.-

Se ha realizado un *análisis pormenorizado* de estos elementos para grandes y pequeñas deformaciones, en problemas elásticos y elastoplásticos. En dicho estudio se ha abordado la formulación de los elementos y su implementación computacional, la contribución de los modos mejorados en la mejora de la cinemática de los elementos, y su influencia en el comportamiento espectral de los mismos.

Elastoplasticidad con grandes deformaciones.-

Reformulación para los *elementos con deformaciones supuestas* del *modelo constitutivo formulado en* ([Garino, 1993](#)), e implementación computacional del mismo. La adecuación del modelo se ha realizado manteniendo las aportaciones originales del trabajo referenciado en cuanto a sencillez y eficacia computacional.

Estimación de error.-

Desarrollo riguroso de una *metodología para la estimación del error de discretización* en elementos con formulación en desplazamientos, basado en la contribución energética de los modos mejorados de los elementos con deformaciones supuestas. A partir de esta metodología se propone un estimador de error cuyas ventajas principales son:

- *Formulación general* de tipo incremental, que permite la *aplicación de la misma metodología a problemas lineales y no lineales* (elasticidad finita y plasticidad infinitesimal). Se han presentado ejemplos de elasticidad infinitesimal, de elasticidad finita empleando modelos Neo-Hookeanos y de plasticidad infinitesimal con modelos de Von Mises. En este último caso, la idea clave de la formulación del estimador es la integración variacional de las ecuaciones de la plasticidad ([Ortiz y Stainier, 1998](#)).
- *Formulación local en cada elemento* que evita establecer suavizados globales o los cálculos de la solución en subdominios. De esta manera se evitan los costes computacionales asociados a estos procedimientos, que pueden ser muy elevados en mallas finas.

Las tasas de convergencia globales obtenidas en los ejemplos que se han presentado, y la distribución de errores locales en la malla se consideran adecuadas.

Localización.-

En las aplicaciones a la *localización de deformaciones* se ha establecido una metodología basada en el cálculo con programas de álgebra formal ([Maple, 1991a](#)) que permite llegar a resultados analíticos sobre las prestaciones de los elementos.

Por otra parte, todas las implementaciones (elementos, modelos constitutivos, estimador de error, análisis del tensor acústico, etc.) se han realizado en la versión mejorada del programa de elementos finitos FEAP ([Taylor, 1999](#)). Si bien esta aportación es modesta, se ha dejado disponible un marco de trabajo unificado para el desarrollo de las futuras líneas de investigación abiertas con esta tesis.

6.4. Líneas de investigación propuestas

A partir del trabajo realizado en esta tesis se pueden plantear diversas líneas de investigación, orientadas a profundizar y ampliar algunos aspectos que han quedado abiertos. Entre estas líneas cabe destacar:

- Procesos de *remallaje adaptativo* a partir de los resultados obtenidos con el estimador de error propuesto en el capítulo 4.
- Analizar la viabilidad de extender el *estimador de error* al caso de *plasticidad con grandes deformaciones*, incluyendo técnicas de regularización viscoplástica si es necesario.

- Extensión del modelo constitutivo de *grandes deformaciones* para *materiales cohesivo-friccionales* no asociativos, y para incluir comportamiento viscoplástico.
- *Mejora de la estabilidad de los elementos* para problemas con grandes deformaciones plásticas.
- Desarrollar las prestaciones de los elementos y de los modelos constitutivos para representar *fenómenos de rotura en hormigón*. Empleando la teoría de mezclas se incluirán modelos de daño para representar el comportamiento del árido, y modelos de tipo cohesivo-friccional para el mortero. Más a largo plazo, esta línea se abordaría a partir de las hipótesis y teorías de las discontinuidades fuertes.
- Extensión de los modelos y elementos utilizados a *problemas tridimensionales*.
- *Generalización* del modelo constitutivo de grandes deformaciones al *problema térmico-mecánico acoplado* empleando esquemas alternados y elementos de deformaciones supuestas para la integración de las ecuaciones.
- *Regularización* de la respuesta de los elementos en problemas de localización.

Apéndice A

Plasticidad Infinitesimal

A.1. Ecuaciones locales de la plasticidad

En este anexo se resume la formulación de la plasticidad en el contexto de la teoría infinitesimal, para materiales con respuesta independiente de la velocidad de deformación. Asimismo se desprecian los efectos térmicos, suponiendo que el problema es únicamente mecánico. Los tensores de segundo orden se interpretan como transformaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n , perteneciendo al espacio vectorial $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Análogamente, los tensores de cuarto orden son transformaciones de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, donde el símbolo \times indica el producto cartesiano. Finalmente se denomina por $\mathbb{S} \subset L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, al subespacio de los tensores de segundo orden de dimensión $n(n+1)/2$, que son simétricos.

A.1.1. Modelo constitutivo

El tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ y el tensor de deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}$ no dependen de la configuración, ya que en el contexto de las deformaciones infinitesimales no tiene sentido distinguir la configuración de referencia de la configuración deformada. No obstante, se supondrá salvo que se diga lo contrario que estos tensores dependen del punto $\boldsymbol{x} \in \Omega$ del sólido elastoplástico definido por el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

En la teoría clásica de la plasticidad, el flujo plástico de un material se considera un proceso irreversible caracterizado por la historia del tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$, el tensor de deformaciones plásticas $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ y un conjunto de n_{int} variables internas o parámetros de endurecimiento que se engloban en el vector $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n_{\text{int}}}$

Observación A.1.1 *Tomando $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ y $\boldsymbol{\xi}$ como variables independientes se llega a una formulación de la plasticidad en el espacio de deformaciones. Sin embargo, en la plasticidad clásica la función de fluencia y la regla de flujo se formulan en el espacio de tensiones $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}$, siendo \boldsymbol{q} variables internas de naturaleza tensional. Este hecho carece de relevancia pues como se verá a*

continuación las variables de tensión están relacionadas con las variables de deformación.

La teoría de la plasticidad infinitesimal se basa en las hipótesis y resultados que se describen a continuación.

Descomposición aditiva

Se postula la descomposición aditiva del tensor de deformaciones infinitesimales en una parte elástica y una parte plástica:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{A.1})$$

Función de energía libre

Existe una función de energía libre $\Psi : \Omega \times \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{\text{int}}} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que el tensor de tensiones y las variables internas tensionales se relacionan con las deformaciones elásticas y los parámetros de endurecimiento, mediante las expresiones:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{q} = -\frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (\text{A.3})$$

Observación A.1.2 *Si el sólido es homogéneo, la dependencia funcional de la energía libre es:*

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\xi}) \quad (\text{A.4})$$

Si a la descomposición aditiva (A.1) se le impone la siguiente dependencia funcional:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \quad (\text{A.5})$$

entonces, la función de energía libre también admite la descomposición:

$$\Psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\xi}) = \Psi^e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^e) + \Psi^p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \quad (\text{A.6})$$

El sumando $\Psi^e(\cdot)$ se suele denotar por la letra $W(\cdot)$, y se denomina *función de energía elástica almacenada*. El sumando $\Psi^p(\cdot)$ se denomina *función potencial de las variables internas tensionales* y se expresa por la letra $\mathcal{H}(\cdot)$.

Observación A.1.3 *El modelo más sencillo para materiales homogéneos es el que resulta de considerar cuadráticas las funciones W y \mathcal{H} :*

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot \mathbf{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (\text{A.7})$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{H} \boldsymbol{\xi} \quad (\text{A.8})$$

donde \mathbf{C}^e y \mathbf{H} son tensores constantes que se llaman tensor de módulos elásticos y tensor de módulos plásticos, respectivamente. Aplicando (A.1; A.2; A.3), se obtiene:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{H}\boldsymbol{\xi} \quad (\text{A.10})$$

Dominio elástico y criterio de fluencia

El criterio de fluencia se define mediante la función $f : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{\text{int}}} \rightarrow \mathbb{R}$. El espacio de tensiones admisible $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{\text{int}}}$ debe pertenecer al conjunto \mathbb{E} definido como:

$$\mathbb{E} = \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{\text{int}}} \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0\} \quad (\text{A.11})$$

El interior del conjunto \mathbb{E} se denomina *dominio elástico*:

$$\text{int}(\mathbb{E}) = \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{\text{int}}} \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0\} \quad (\text{A.12})$$

y la frontera se denomina *superficie de fluencia*:

$$\partial\mathbb{E} = \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{\text{int}}} \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0\} \quad (\text{A.13})$$

Regla de flujo y Ley de Endurecimiento

La propiedad de irreversibilidad del flujo plástico queda expresada en las siguientes ecuaciones de evolución de $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ y $\boldsymbol{\xi}$:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{A.15})$$

denominándose g *potencial del flujo plástico*. Las funciones $\mathbf{r} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{\text{int}}} \rightarrow \mathbb{S}$ y $\mathbf{h} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{\text{int}}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{int}}}$ definen respectivamente la *dirección de flujo plástico* y la *regla de endurecimiento*. El escalar $\dot{\gamma}$ se denomina *parámetro de consistencia* y verifica:

- Condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\gamma} \geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad \text{y} \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{A.16})$$

- Condición de consistencia:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \dot{\gamma} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{A.17})$$

Observación A.1.4 En el caso particular en que el potencial de flujo plástico coincide con la función de fluencia:

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{A.19})$$

el modelo plástico se denomina asociativo

A.1.2. Tensor elastoplástico tangente

Con objeto de obtener la relación tangente entre el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones, las ecuaciones (A.2; A.3) se expresan en forma de tasa, mediante el tensor tangente de módulos elásticos \mathbf{C}^e y el tensor tangente de módulos de endurecimiento \mathbf{H} :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad (\text{A.20})$$

$$\dot{q} = \mathbf{H} \dot{\xi} \quad (\text{A.21})$$

Derivando la función de fluencia mediante la regla de la cadena:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} \quad (\text{A.22})$$

y sustituyendo (A.20; A.21; A.14; A.15), resulta:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{C}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{C}^e \mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \mathbf{h} \right) \quad (\text{A.23})$$

Por otra parte, sustituyendo (A.14) en (A.20):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\gamma} \mathbf{r}) \quad (\text{A.24})$$

Suponiendo que el estado es de carga plástica ($\dot{\gamma} > 0$), la condición de consistencia plástica impone que $\dot{f} = 0$, con lo que despejando $\dot{\gamma}$ en (A.23):

$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{C}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{C}^e \mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \mathbf{h}} \quad (\text{A.25})$$

y sustituyendo en (A.24), después de operar se obtiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{C}^e \mathbf{r} \otimes \mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{C}^e \mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \mathbf{h}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}^{ep} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{A.26})$$

Se define entonces el tensor tangente elastoplástico como:

$$\mathbf{C}^{ep} = \begin{cases} \mathbf{C}^e & \text{si } \dot{\gamma} = 0 \\ \mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{C}^e \mathbf{r} \otimes \mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{C}^e \mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \mathbf{H} \mathbf{h}} & \text{si } \dot{\gamma} > 0 \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Observación A.1.5 *En el caso particular de la plasticidad asociativa el tensor tangente elastoplástico es simétrico.*

En el cuadro A.1 se resumen las ecuaciones que definen el modelo constitutivo de la plasticidad infinitesimal.

1. Función de energía libre

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad (\text{A.28})$$

$$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{H}\dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (\text{A.29})$$

siendo:

$$\mathbf{C}^e = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e \partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\xi} \partial \boldsymbol{\xi}} \quad (\text{A.30})$$

2. Criterio de fluencia

$$\mathbb{E} = \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{\text{int}}} \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0\} \quad (\text{A.31})$$

3. Regla de flujo y regla de endurecimiento

- Modelo no asociativo

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{A.32})$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{A.33})$$

- Modelo asociativo

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{A.34})$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{A.35})$$

4. Condiciones de Kuhn-Tucker

$$\dot{\gamma} \geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad \text{y} \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{A.36})$$

5. Condición de consistencia:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \dot{\gamma} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{A.37})$$

Cuadro A.1: *Ecuaciones de la plasticidad infinitesimal*

A.2. Plasticidad de Von Mises

Los tensores de tensiones y deformaciones se descomponen en su parte desviadora y volumétrica:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3}\varepsilon_{vol}\mathbf{1}; \quad \varepsilon_{vol} = \text{traza}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (\text{A.38})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \frac{1}{3}p\mathbf{1}; \quad p = \text{traza}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (\text{A.39})$$

El comportamiento del material, que se supone isótropo, en régimen elástico se representará mediante la ley de Hooke, expresada en términos de los coeficientes de Lamé λ y μ :

$$\mathbf{C} = \lambda\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu\mathbf{I} \quad (\text{A.40})$$

La norma de la parte desviadora del tensor de tensiones se expresa en función de su segundo invariante:

$$\|\mathbf{s}\| = \sqrt{2J_2} \quad \text{donde } J_2 = \frac{1}{2}\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \quad (\text{A.41})$$

La función de fluencia de Von-Mises tiene la expresión:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, q) = \|\mathbf{s} - \mathbf{q}\| - q \quad (\text{A.42})$$

Observación A.2.1 *En el espacio de tensiones principales la superficie de fluencia de Von-Mises es un cilindro de revolución, cuyo eje pasa por el origen y es perpendicular al plano $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$, y el radio vale q .*

El conjunto de variables internas \mathbf{q} se denominan *tensión de retroceso* (back-stress) estando asociadas al endurecimiento cinemático. La variable interna q asociada al endurecimiento isotrópico se denomina *tensión de fluencia*. La tensión de fluencia q se expresa en función de su variable interna conjugada ξ (denominada *deformación plástica efectiva*):

$$q = \sqrt{\frac{2}{3}}Y(\xi) \quad (\text{A.43})$$

La función:

$$H_{iso}(\xi) = \frac{dY(\xi)}{d\xi} \quad (\text{A.44})$$

se llama *módulo de endurecimiento isotrópico*.

Observación A.2.2 *Por motivos de claridad, las variables internas de endurecimiento isotrópico ξ y q se separarán a efectos de notación de las variables de endurecimiento cinemático: $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n_{int}-1}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_{int}-1}$*

Llamando $\Sigma = \mathbf{s} - \mathbf{q}$ y definiendo la normal a la superficie de fluencia en el espacio de tensiones:

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \Sigma} \quad (\text{A.45})$$

es fácil demostrar simplemente operando las siguientes igualdades:

$$\frac{\partial f}{\partial \Sigma} = \frac{\Sigma}{\|\Sigma\|} \mathbf{n} \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = -\mathbf{n} \quad (\text{A.47})$$

El modelo de Von-Mises es asociativo, y de acuerdo con la definición (A.45), la regla de flujo se expresa:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \mathbf{n} \quad (\text{A.48})$$

y se suele denominar *regla de flujo de Levy-Saint Venant*. La regla de endurecimiento (A.15) tiene en este caso la expresión:

$$\dot{\xi} = -\dot{\gamma} \mathbf{n} \quad (\text{A.49})$$

Teniendo en cuenta que las variables \mathbf{q} y ξ están relacionadas mediante el *módulo de endurecimiento cinemático* H_{kin} :

$$\dot{\mathbf{q}} = -\frac{2}{3} H_{kin}(\xi) \dot{\xi} \quad (\text{A.50})$$

La regla de endurecimiento (A.49) se expresa para las variables asociadas al endurecimiento cinemático mediante:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{2}{3} H_{kin}(\xi) \dot{\gamma} \mathbf{n} \quad (\text{A.51})$$

y se denomina *regla de endurecimiento cinemático de Prager-Ziegler*. Para las variables internas de endurecimiento isotrópico, la ecuación equivalente a la (A.49) es:

$$\dot{\xi} = -\dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial q} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} \quad (\text{A.52})$$

Dado que de acuerdo con (A.48) se verifica $\|\epsilon^p\| = \dot{\gamma}$, la ecuación (A.52) suele expresarse mediante:

$$\xi = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \|\epsilon^p\| dt \quad (\text{A.53})$$

El tensor tangente elastoplástico se obtiene particularizando (A.27) para las condiciones de asociatividad. Considerando además que el comportamiento elástico viene dado por (A.40), resulta:

$$\mathbf{C}^{ep} = \begin{cases} \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} & \text{si } \dot{\gamma} = 0 \\ k \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{1 + \frac{H_{iso}(\xi) + H_{kin}(\xi)}{3\mu}} \right) & \text{si } \dot{\gamma} > 0 \end{cases} \quad (\text{A.54})$$

En el cuadro A.2 se resumen esquemáticamente las ecuaciones del modelo elastoplástico de Von-Mises, para el caso particular en que la respuesta elástica viene dada por (A.40).

1. Función de energía libre	
	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad (\text{A.55})$
	$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{H}\dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (\text{A.56})$
siendo:	
	$\mathbf{C}^e = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\xi} \partial \boldsymbol{\xi}} \quad (\text{A.57})$
2. Criterio de fluencia	
	$\mathbb{E} = \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{\text{int}}-1} \mid f = \ \mathbf{s} - \mathbf{q}\ - q \leq 0\} \quad (\text{A.58})$
3. Regla de flujo y regla de endurecimiento	
	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{n} \quad (\text{A.59})$
	$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -\dot{\gamma} \mathbf{n} \quad (\text{A.60})$
	$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} \quad (\text{A.61})$
4. Condiciones de Kuhn-Tucker	
	$\dot{\gamma} \geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad \text{y} \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{A.62})$
5. Condición de consistencia:	
	$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \dot{\gamma} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{A.63})$

Cuadro A.2: Ecuaciones de la plasticidad infinitesimal de Von Mises

A.2.1. Integración implícita de las ecuaciones

Llamando:

$$\Delta\gamma = \gamma_{t+\Delta t} - \gamma_t \quad (\text{A.64})$$

la forma discreta de las ecuaciones correspondientes al modelo elastoplástico de Von-Mises son:

- Función de energía libre

$$p_{t+\Delta t} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \varepsilon_{vol,t+\Delta t} \quad (\text{A.65})$$

$$\mathbf{s}_{t+\Delta t} = 2\mu(\mathbf{e}_{t+\Delta t} - \mathbf{e}_{t+\Delta t}^p) \quad (\text{A.66})$$

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t - \frac{2}{3}H_{kin}(\xi_{t+\Delta t})\boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t} \quad (\text{A.67})$$

$$q_{t+\Delta t} = \sqrt{\frac{2}{3}}Y(\xi_{t+\Delta t}) \quad (\text{A.68})$$

- Criterio de fluencia

$$f_{t+\Delta t} = \|\mathbf{s}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_{t+\Delta t}\| - q_{t+\Delta t} \leq 0 \quad (\text{A.69})$$

- Regla de flujo

$$\mathbf{e}_{t+\Delta t}^p = \mathbf{e}_t^p + \Delta\gamma\mathbf{n}_{t+\Delta t} \quad (\text{A.70})$$

- Ley de endurecimiento

$$\boldsymbol{\xi}_{t+\Delta t} = -\Delta\gamma\mathbf{n}_{t+\Delta t} \quad (\text{A.71})$$

$$\xi_{t+\Delta t} = \xi_t + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma \quad (\text{A.72})$$

Observación A.2.3 En las ecuaciones correspondientes a la parte elástica de la energía libre se han separado las componentes volumétrica (A.65) y desviadora (A.66)

La solución de las ecuaciones discretas de la plasticidad se realiza con un método predictor elástico-corrector plástico. En el predictor elástico se supone $\gamma_{t+\Delta t}^{\text{PR}} = 0$, y las ecuaciones (A.67; A.70; A.72) se expresan respectivamente:

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} = \mathbf{q}_t \quad (\text{A.73})$$

$$\mathbf{e}_{t+\Delta t}^{p\text{PR}} = \mathbf{e}_t^p \quad (\text{A.74})$$

$$\xi_{t+\Delta t}^{\text{PR}} = \xi_t \quad (\text{A.75})$$

Sustituyendo (A.74) en (A.66) se obtiene el tensor desviador de tensiones predictor:

$$\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} = 2\mu(\mathbf{e}_{t+\Delta t} - \mathbf{e}_t^p) \quad (\text{A.76})$$

Los valores de $\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}}$ y $\mathbf{q}_{t+\Delta t}^{\text{PR}}$ calculados con (A.76; A.73) se sustituyen en la ecuación del criterio de fluencia (A.69). Si (A.69) se satisface, los valores predictores obtenidos en (A.74; A.73; A.75; A.76) definen la solución en $t + \Delta t$. Si los valores predictores hacen que $f_{t+\Delta t} > 0$ en (A.69), es necesario entrar en el algoritmo corrector plástico que se describe a continuación.

En el algoritmo corrector, los valores predictores se toman como condiciones iniciales. Sustituyendo las ecuaciones (A.70; A.76) en (A.66):

$$\mathbf{s}_{t+\Delta t} = \mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - 2\mu\Delta\gamma\mathbf{n}_{t+\Delta t} \quad (\text{A.77})$$

y restando (A.67) de (A.77):

$$\mathbf{s}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - \mathbf{q}_t - 2 \left(\mu + \frac{1}{3} H_{kin}(\xi_{t+\Delta t}) \right) \Delta\gamma \mathbf{n}_{t+\Delta t} \quad (\text{A.78})$$

En virtud de (A.46), $\mathbf{s}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_{t+\Delta t}$ lleva la dirección de $\mathbf{n}_{t+\Delta t}$. Con este razonamiento, de (A.78) se concluye que $\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - \mathbf{q}_t$ también lleva la dirección de $\mathbf{n}_{t+\Delta t}$. La ecuación (A.78) puede expresarse por tanto:

$$\left[\|\mathbf{s}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_{t+\Delta t}\| - \|\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - \mathbf{q}_t\| + 2 \left(\mu + \frac{1}{3} H_{kin}(\xi_{t+\Delta t}) \right) \Delta\gamma \right] \mathbf{n}_{t+\Delta t} = \mathbf{0} \quad (\text{A.79})$$

Por tanto, el coeficiente de $\mathbf{n}_{t+\Delta t}$ en (A.79) es nulo:

$$\|\mathbf{s}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_{t+\Delta t}\| - \|\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - \mathbf{q}_t\| + 2 \left(G + \frac{1}{3} H_{kin}(\xi_{t+\Delta t}) \right) \Delta\gamma = 0 \quad (\text{A.80})$$

De las ecuaciones (A.68; A.69; A.72; A.80) se obtiene la siguiente ecuación escalar:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - \mathbf{q}_t\| = \\ \sqrt{\frac{2}{3}} Y \left(\xi_t + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma \right) + 2 \left(G + \frac{1}{3} H_{kin}(\xi_t + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma) \right) \Delta\gamma \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

que permite calcular el valor del multiplicador plástico $\Delta\gamma$.

Observación A.2.4 La ecuación (A.81) es en general no lineal, debiendo resolverse mediante algún método iterativo. En el caso en que los módulos de endurecimiento sean constantes, la ecuación es lineal y permite obtener la siguiente solución cerrada:

$$\Delta\gamma = \frac{\|\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - \mathbf{q}_t\| - q_t}{2 \left[G + \frac{1}{3} (H_{iso} + H_{kin}) \right]} \quad (\text{A.82})$$

El valor calculado de $\Delta\gamma$ se combina con el resultado:

$$\mathbf{n}_{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - \mathbf{q}_t}{\|\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - \mathbf{q}_t\|} \quad (\text{A.83})$$

para obtener los valores de $\mathbf{s}_{t+\Delta t}$, $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ y $\mathbf{e}_{t+\Delta t}^p$ mediante las ecuaciones (A.77; A.78; A.70), respectivamente.

A.2.2. Tensor elastoplástico tangente consistente

Si en el cálculo de elementos finitos se emplea el tensor tangente elastoplástico expresado en (A.27), se pierde la tasa de convergencia cuadrática del método de Newton-Raphson. Para mantenerla se emplea un tensor

elastoplástico algorítmicamente consistente con el algoritmo de integración discreto de las ecuaciones constitutivas (Simó y Taylor, 1985). Este tensor se obtiene imponiendo la condición de consistencia plástica (A.63) en la formulación del algoritmo numérico en vez de en la formulación del modelo continuo. En la mencionada referencia se detalla el procedimiento para obtener la expresión que a continuación se detalla:

$$\hat{\mathbf{C}}^{ep} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2\mu\beta \left(\mathbf{1} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) - 2\mu\bar{\gamma}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (\text{A.84})$$

siendo:

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{Y(\xi_{t+\Delta t}) + \sqrt{\frac{2}{3}} H_{kin}(\xi_{t+\frac{\Delta t}{2}}) \Delta\gamma}{\|\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - \mathbf{q}_t\|} \quad (\text{A.85})$$

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{H_{iso}(\xi_{t+\Delta t}) + H_{kin}(\xi_{t+\Delta t})}{3G}} - (1 - \beta) \quad (\text{A.86})$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - \mathbf{q}_t}{\|\mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - \mathbf{q}_t\|} \quad (\text{A.87})$$

A.3. Plasticidad de Drucker-Prager

El modelo de plasticidad de Drucker-Prager se puede interpretar como una extensión del modelo de Von Mises, que considera la influencia de la presión en la resistencia de corte del material. La función de fluencia tiene la expresión:

$$f = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - \kappa \quad (\text{A.88})$$

donde J_2 es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones, I_1 es el primer invariante del tensor de tensiones, y α y κ son dos parámetros de comportamiento del material.

La ecuación $f = 0$ corresponde a un cono de revolución en el espacio de tensiones principales, cuyo eje forma un mismo ángulo con las direcciones de los ejes coordenados, y tiene el vértice situado en el octante de tensiones positivas. Si se hacen coincidir los vértices del cono de Drucker-Prager y de la pirámide de Mohr-Coulomb, y los meridianos de compresión máxima (entonces las alturas de ambas superficies también coinciden), los parámetros de ambos modelos constitutivos quedan relacionados por las expresiones:

$$\alpha = \frac{2 \sen \phi}{\sqrt{3}(3 - \sen \phi)} \quad (\text{A.89})$$

$$\kappa = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sen \phi)} \quad (\text{A.90})$$

siendo c la cohesión y ϕ el ángulo de rozamiento interno del modelo de Mohr-Coulomb. Si por el contrario el cono se hace coincidir con los meridianos de

tracción máxima de la pirámide, entonces resulta:

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 + \operatorname{sen} \phi)} \quad (\text{A.91})$$

$$\kappa = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \operatorname{sen} \phi)} \quad (\text{A.92})$$

La regla de flujo (A.14) se obtiene con el potencial de flujo plástico:

$$g = \sqrt{J_2} + \beta I_1 \quad (\text{A.93})$$

Comparando los parámetros α y β de las ecuaciones (A.93) y (A.88) respectivamente, el parámetro β se puede expresar en términos de un ángulo Ψ igual que en (A.89):

$$\beta = \frac{2 \operatorname{sen} \Psi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \psi)} \quad (\text{A.94})$$

El ángulo Ψ se denomina *ángulo de dilatación*, y expresa el cambio de volumen asociado a las deformaciones de corte.

Observación A.3.1 Si el ángulo de rozamiento interno es igual al ángulo de dilatación ($\phi = \Psi$), entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{A.95})$$

y el modelo de Drucker-Prager es asociativo

Desde el punto de vista numérico el vértice del cono del potencial plástico es un punto singular que hace que el proceso de actualización de tensiones esté mal definido para valores bajos de la presión de confinamiento. Para solucionar este problema se define en la zona del vértice una esfera de regularización del potencial plástico (Leroy y Ortiz, 1990), con objeto de garantizar la continuidad del gradiente de tensiones. La zona en la que se sustituye el cono por la esfera está definida a su vez por otro cono (ver figura A.1) cuya ecuación es (Martinez, 1993):

$$\frac{\sqrt{J_2}}{\mu} = \frac{I_1 - I_0}{9k\beta} \quad (\text{A.96})$$

siendo $I_0 = \kappa/\alpha$. La expresión del potencial es en este caso:

$$g = \sqrt{\mu + 9k\beta^2} \sqrt{\frac{J_2}{\mu} + \frac{(I_1 - I_0)^2}{9k}} \quad (\text{A.97})$$

La regla de endurecimiento determina la evolución de la superficie de fluencia a lo largo del proceso de carga, y queda definida mediante la ley de evolución de las variables internas: deformación plástica efectiva ξ , ángulo de rozamiento interno ϕ , cohesión c , dilatación Ψ , etc. La ley de endurecimiento establece la dependencia de las variables internas entre sí, siendo de destacar las siguientes relaciones:

1. Deformación plástica efectiva - Ángulo de rozamiento interno

Esta relación es del tipo:

$$\phi = \phi(\xi) \quad (\text{A.98})$$

expresándose la función de fluencia (A.88) en la forma:

$$f = \sqrt{J_2} + \alpha(\xi)I_1 - \kappa \quad (\text{A.99})$$

2. Cohesión - Deformación plástica efectiva

La cohesión se relaciona con la tensión de fluencia en compresión uniaxial mediante la expresión:

$$Y_c = \frac{6c \cos \phi}{1 - 2 \sin \phi} \quad (\text{A.100})$$

A partir de los resultados del ensayo de compresión simple, la tensión de fluencia Y_c se puede relacionar con la deformación plástica efectiva mediante el módulo de endurecimiento isotrópico H_{iso} :

$$H_{\text{iso}} = \frac{Y_c(\xi)}{d\xi} \quad (\text{A.101})$$

Combinando (A.100) y (A.101), se relacionan la cohesión y la deformación plástica efectiva, expresándose la función de fluencia:

$$f = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 + \kappa(\xi) = 0 \quad (\text{A.102})$$

3. Dilatancia - Deformación plástica efectiva

En este caso la función de fluencia es constante, y lo que se modifica es el potencial plástico en función de la deformación plástica. A partir de la relación entre el ángulo de dilatancia y la deformación plástica efectiva:

$$\Psi = \Psi(\xi) \quad (\text{A.103})$$

el potencial plástico se expresa:

$$g = \sqrt{J_2} + \beta(\xi) I_1 \quad (\text{A.104})$$

Observación A.3.2 *La ley de endurecimiento planteada en términos del ángulo de rozamiento interno se puede interpretar como la modificación por endurecimiento del cono de Drucker-Prager (A.99) debida a la variación del semiángulo cónico. La ley de endurecimiento correspondiente a la cohesión (A.102) se interpreta como una expansión del cono de Drucker-Prager manteniendo el semiángulo cónico constante. Para considerar simultáneamente estas dos formas de endurecimiento, la función de fluencia se suele expresar (Leroy y Ortiz, 1989):*

$$f = \sqrt{J_2} + \alpha(\xi)(I_1 - I_0) \quad (\text{A.105})$$

El tensor elastoplástico tangente se obtiene sustituyendo en (A.27) las expresiones:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \alpha \mathbf{1} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \mathbf{s} \quad (\text{A.106})$$

$$\mathbf{r} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \beta \mathbf{1} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \mathbf{s} \quad (\text{A.107})$$

y su expresión es:

$$\mathbf{C}^{ep} = \begin{cases} \mathbf{C}^e = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} & \text{si } \dot{\gamma} = 0 \\ \mathbf{C}^e - \frac{1}{\mu + 9k\alpha\beta + H_{\text{iso}}} \left(3\alpha k \mathbf{1} + \frac{\mu}{\sqrt{J_2}} \mathbf{s} \right) \otimes \left(3\beta k \mathbf{1} + \frac{\mu}{\sqrt{J_2}} \mathbf{s} \right) & \text{si } \dot{\gamma} > 0 \end{cases} \quad (\text{A.108})$$

En el cuadro A.3 se resumen las ecuaciones del modelo elastoplástico de Drucker-Prager no asociativo para el caso en que la respuesta elástica corresponde a la expresión (A.40).

1. Función de energía libre	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$	(A.109)
siendo:	$\mathbf{C}^e = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}$	(A.110)
2. Criterio de fluencia	$f = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - \kappa \leq 0$	(A.111)
3. Regla de flujo y regla de endurecimiento	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ siendo: $g = \sqrt{J_2} + \beta I_1$	(A.112)
	$\alpha = \alpha(\xi)$	(A.113)
	$\kappa = \kappa(\xi)$	(A.114)
4. Condiciones de Kuhn-Tucker	$\dot{\gamma} \geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad \text{y} \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$	(A.115)
5. Condición de consistencia:	$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \dot{\gamma} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$	(A.116)

Cuadro A.3: Ecuaciones de la plasticidad infinitesimal de Drucker-Prager

A.3.1. Integración implícita de las ecuaciones

El proceso de integración implícita de las ecuaciones constitutivas se detalla en (Martinez, 1993), limitándose este apéndice a recopilar los resultados

finales obtenidos en dicho trabajo. En el instante t se suponen conocidos $\boldsymbol{\varepsilon}_t$, $\boldsymbol{\sigma}_t$, α_t y γ_t (el ángulo de dilatación Ψ se supone constante), deseándose obtener los correspondientes valores en $t + \Delta t$.

Se parte de las ecuaciones incrementales:

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{C}^e \left(\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \gamma \frac{\partial g_{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (\text{A.117})$$

$$0 = f(\boldsymbol{\sigma}_{t+\Delta t}, \alpha_{t+\Delta t}) = 0 \quad (\text{A.118})$$

con la dependencia funcional $\alpha_{t+\Delta t} = \alpha_{t+\Delta t}(\gamma_t + \Delta \gamma)$. Particularizando estas ecuaciones para el modelo de Drucker-Prager, y separando las componentes desviadoras de la esférica, se obtiene:

$$\mathbf{s}_{t+\Delta t} = \mathbf{s}_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - 2\mu \Delta \gamma \frac{\partial g_{t+\Delta t}}{\partial \mathbf{s}} \quad (\text{A.119})$$

$$(I_1)_{t+\Delta t} = (I_1^{\text{PR}})_{t+\Delta t} - 9k \Delta \gamma \frac{\partial g_{t+\Delta t}}{\partial I_1} \quad (\text{A.120})$$

$$0 = (\sqrt{J_2})_{t+\Delta t} + \alpha_{t+\Delta t} ((I_1)_{t+\Delta t} - I_0) \quad (\text{A.121})$$

Observación A.3.3 *En el caso de que en $t + \Delta t$ la solución esté en el dominio elástico, la solución es la correspondiente a los valores predictores.*

Considerando la regularización del potencial plástico con una superficie esférica en la zona del vértice, tal y como se ha descrito anteriormente, se obtiene:

1. Si $(\sqrt{J_2})_{t+\Delta t}^{\text{PR}}/\mu \geq ((I_1)_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - I_0)/9k\beta$ (el potencial plástico es una superficie cónica)

En este caso resulta el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$(\sqrt{J_2})_{t+\Delta t} = (\sqrt{J_2})_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - \mu \Delta \gamma \quad (\text{A.122})$$

$$(I_1)_{t+\Delta t} = (I_1)_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - 9k\beta \Delta \gamma \quad (\text{A.123})$$

$$0 = (\sqrt{J_2})_{t+\Delta t} + \alpha_{t+\Delta t} ((I_1)_{t+\Delta t} - I_0) \quad (\text{A.124})$$

de donde se obtienen $(J_2)_{t+\Delta t}$, $(I_1)_{t+\Delta t}$ y $\Delta \gamma$.

2. Si $(\sqrt{J_2})_{t+\Delta t}^{\text{PR}}/\mu \leq ((I_1)_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - I_0)/9k\beta$ (el potencial plástico es una superficie esférica)

El sistema de ecuaciones es en este caso:

$$(\sqrt{J_2})_{t+\Delta t} = 0 \quad (\text{A.125})$$

$$(I_1)_{t+\Delta t} = I_0 \quad (\text{A.126})$$

$$\Delta \gamma = \left[\frac{\frac{(J_2)_{t+\Delta t}^{\text{PR}}}{\mu} + \frac{((I_1)_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - I_0)^2}{9k}}{\mu + 9k\beta^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.127})$$

A.3.2. Tensor elastoplástico tangente consistente

Al igual que en el apartado anterior nos limitaremos aquí a dar las expresiones finales del tensor elastoplástico algorítmicamente consistente, pudiendo consultarse su deducción en (Martinez, 1993).

1. Si $(\sqrt{J_2})_{t+\Delta t}^{\text{PR}}/\mu \geq ((I_1)_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - I_0)/9k\beta$ (el potencial plástico es una superficie cónica)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}^{ep} = & \left[\left(k - \frac{2}{3} \frac{\mu}{1 + 3 \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{J_2}}} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \frac{1}{1 + 3 \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{J_2}}} \mathbf{I} \right] - \\ & \frac{1}{\mu + 9k\alpha\beta + \frac{d\alpha}{d(\Delta\gamma)}(I_0 - I_1)} \left(3\alpha k \mathbf{1} + \frac{\mu}{\sqrt{J_2}} \mathbf{s} \right) \otimes \left(3\beta k \mathbf{1} + \frac{\mu}{\sqrt{J_2}} \mathbf{s} \right) + \\ & \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{J_2}\mu + \Delta\gamma} \frac{\mu}{\sqrt{J_2}} \mathbf{s} \otimes \frac{\mu}{\sqrt{J_2}} \mathbf{s} \end{aligned} \quad (\text{A.128})$$

2. Si $(\sqrt{J_2})_{t+\Delta t}^{\text{PR}}/\mu \leq ((I_1)_{t+\Delta t}^{\text{PR}} - I_0)/9k\beta$ (el potencial plástico es una superficie esférica)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}^{ep} = & \left[\left(k - \frac{2}{3} \frac{\mu}{1 + 3 \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{J_2}}} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \frac{1}{1 + 3 \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{J_2}}} \mathbf{I} \right] - \\ & \frac{1}{\mu + 9k\alpha\beta + \frac{1-\sqrt{3}\alpha}{\sqrt{3}} H_{\text{iso}} \sqrt{2\beta^2 + \frac{1}{3}}} \left(3\alpha k \mathbf{1} + \frac{\mu}{\sqrt{J_2}} \mathbf{s} \right) \otimes \left(3\beta k \mathbf{1} + \frac{\mu}{\sqrt{J_2}} \mathbf{s} \right) + \\ & \frac{\Delta\gamma}{\sqrt{J_2}\mu + \Delta\gamma} \frac{\mu}{\sqrt{J_2}} \mathbf{s} \otimes \frac{\mu}{\sqrt{J_2}} \mathbf{s} \end{aligned} \quad (\text{A.129})$$

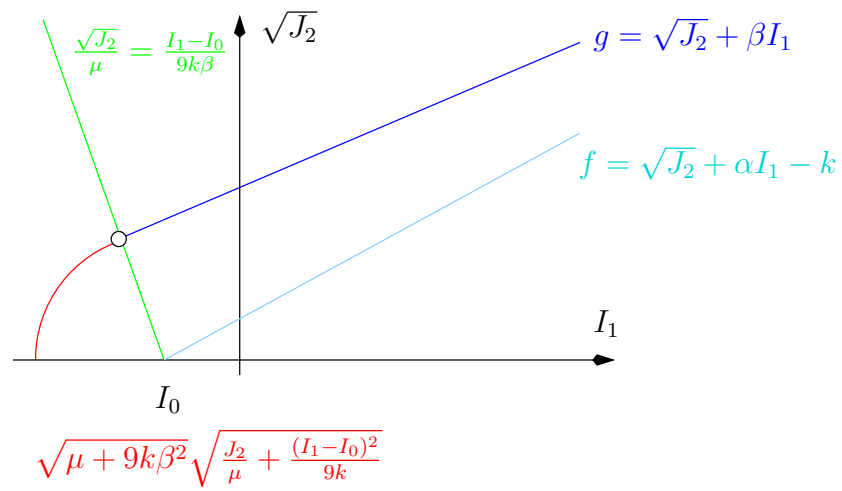


Figura A.1: *Plasticidad de Drucker-Prager. Función de fluencia y potencial plástico*

Apéndice B

Algunos conceptos de mecánica no lineal de medios continuos

En este apéndice se recogen algunas definiciones y resultados básicos de la mecánica de medios continuos con grandes deformaciones, en cuanto a la cinemática y a las tensiones. En la definición del modelo constitutivo en el capítulo 3 la cinemática del continuo elastoplástico, basada en la existencia de una configuración intermedia, juega un papel importante. Por esta razón se ha creído conveniente revisar en este anexo algunos de los conceptos que sirven de base a los desarrollos que allí se exponen. Asimismo, en la tesis se han empleado diversos tensores de tensiones cuya definición y sentido físico se cree conveniente detallar aquí.

B.1. Configuraciones, Movimiento y Deformación

Sea un sólido Ω que en el instante $t = 0$ ocupa una región $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ y en el instante t ocupa una región $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$. Ω_0 se denominará *configuración de referencia o material* del sólido Ω y Ω_t *configuración deformada o espacial* de Ω en el instante t . Las partículas de la configuración de referencia, Ω_0 , se designan mediante \mathbf{X} (coordenadas materiales) y las partículas de la configuración deformada, Ω_t , mediante \mathbf{x} (coordenadas espaciales).

En la mecánica de medios continuos se supone que existe una función de deformación que se define a continuación:

Definición B.1.1 (Deformación)

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \exists \varphi_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t \mid \mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{X})$$

La función φ_t se denomina deformación. Se le exige que sea biunívoca, continua, derivable y que preserve la orientación.

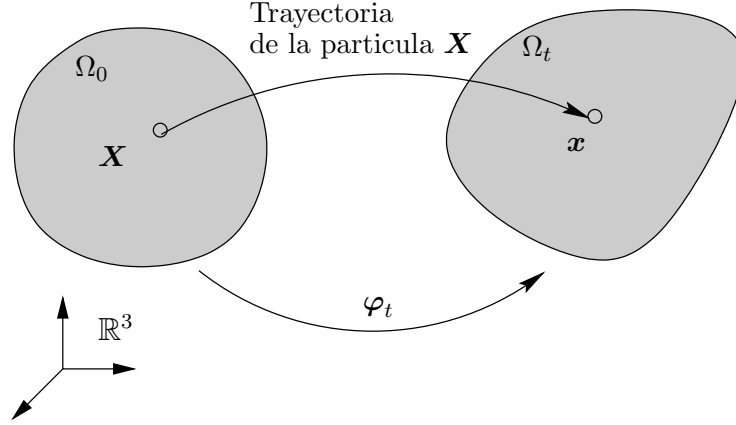


Figura B.1: Configuraciones del sólido Ω : Ω_0 es la configuración de referencia y Ω_t es la configuración deformada

Definición B.1.2 (Movimiento) El movimiento del sólido Ω se definirá mediante una función suave de la forma:

$$\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \Omega_t \quad | \quad \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t), \quad t \in [0, T] \quad (\text{B.1})$$

De esta definición y de la dada en [B.1.1](#), un *movimiento* se puede interpretar como una familia uniparamétrica de *deformaciones* φ_t (siendo el parámetro la variable tiempo, t).

Observación B.1.1 En lo sucesivo y si no se indica lo contrario, para la deformación se supondrá un instante genérico fijo $t > 0$ y se omitirá el subíndice t en φ_t , es decir: $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X})$

Definición B.1.3 (Gradiente de Deformación) Asociado a φ se define el operador tangente \mathbf{F} , que se denomina gradiente de deformación, mediante la expresión:

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\mathbf{X}} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} \quad (\text{B.2})$$

Observación B.1.2 Para que en el proceso de deformación los volúmenes no nulos en la configuración de referencia se mantengan no nulos en la configuración deformada se debe verificar:

$$\det(\mathbf{F}) > 0$$

Definición B.1.4 (Descomposición polar) El gradiente de deformación se puede descomponer en las formas:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (\text{B.4})$$

siendo $\mathbf{R} \in SO(3)$ el tensor asociado a una transformación ortogonal propia. Los tensores \mathbf{U} y \mathbf{V} se denominan tensores de estiramiento derecho e izquierdo, respectivamente.

Definición B.1.5 (Velocidad) Dado un movimiento $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$, se define la velocidad del punto material \mathbf{X} como:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (\text{B.5})$$

La velocidad del punto espacial $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ es:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (\text{B.6})$$

y se puede obtener también mediante el cambio de variable $\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x})$, resultando $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$

Definición B.1.6 (Aceleración) La aceleración material de un movimiento $\varphi(\mathbf{X}, t)$ se define como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (\text{B.7})$$

Definición B.1.7 (Derivada Material) Sea $\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)$ un ente material y $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)$ el mismo ente expresado en la configuración espacial. Derivando respecto del tiempo y aplicando la regla de la cadena se obtiene la derivada material $\dot{\mathbf{q}}$ de $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{B.8})$$

Corolario B.1.1 La aceleración material es la derivada material de la velocidad espacial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

Definición B.1.8 (Gradiente Espacial de Velocidad) Se define el tensor gradiente de la velocidad espacial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ como:

$$\mathbf{l} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \quad (\text{B.9})$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{B.10})$$

B.2. Operadores Push-forward y Pull-back

Este apartado introduce las definiciones de los operadores que le dan título. La definición detallada y rigurosa de los mismos se sale de los objetivos del apéndice, pudiendo consultarse en (Marsden y Hughes, 1983).

Definición B.2.1 (Variedad) Una variedad suave en $\mathbb{R}^{n_{dim}}$, de dimensión n , es un conjunto $\Omega_t \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$ que verifica:

1. $\forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \exists \mathcal{U} \text{ abierto } \subset \Omega_t \quad | \quad \mathbf{x} \in \mathcal{U}$
2. $\forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \exists \{x^\alpha\} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V} \text{ abierto } \subset \mathbb{R}^n \ (n \leq n_{dim}) \quad | \quad \{x^\alpha\} \ (\alpha = 1 \dots n) \text{ es una función biyectiva denominada sistema de coordenadas}$
3. Si $\{x^\alpha\}$ y $\{\bar{x}^\alpha\}$ son dos sistemas de coordenadas, se verifica:

$$\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^1 \dots x^n) \in \mathcal{C}^\infty \quad (\alpha = 1 \dots n)$$

Corolario B.2.1 Un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$ es una variedad

En este apartado, las configuraciones de referencia, Ω_0 , y deformada, Ω_t , se interpretarán como variedades de dimensión 3 en \mathbb{R}^3

Definición B.2.2 (Espacio tangente de una variedad) Sean un conjunto abierto $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ y un punto $\mathbf{x} \in \Omega_t$. El espacio tangente a Ω_t en \mathbf{x} es el espacio afín:

$$\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t = \{\mathbf{x}\} \times \mathbb{R}^3 \quad (\text{B.11})$$

La unión de los espacios tangentes de una variedad se denotará por $\mathbb{T}\Omega_t$

Definición B.2.3 (1-forma) Sean un conjunto abierto $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$ y un punto $\mathbf{x} \in \Omega_t$. Una 1-forma en $\mathbf{x} \in \Omega_t$ es una función lineal $\alpha_{\mathbf{x}} : \mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$

Definición B.2.4 (Espacio cotangente de una variedad) El espacio vectorial de las 1-forma en $\mathbf{x} \in \Omega_t$ se denomina espacio cotangente de Ω_t en \mathbf{x} , y se denota por $\mathbb{T}_{\mathbf{x}}^*\Omega_t$. La unión de los espacios cotangentes de una variedad se denotará por $\mathbb{T}^*\Omega_t$

Definición B.2.5 (Espacio tangente de una deformación) Sea $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ una función deformación. El espacio tangente a φ en \mathbf{X} se denota por $\mathbf{F} = \mathbb{T}_{\mathbf{X}}\varphi : d\mathbf{X} \in \mathbb{T}_{\mathbf{X}} \rightarrow d\mathbf{x} \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}}$ y se demuestra (Marsden y Hughes, 1983) que su expresión es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \nabla_{\mathbf{X}}\varphi(\mathbf{X}) \quad (\text{B.12})$$

Definición B.2.6 (1-forma de una deformación) Sea $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ una función deformación. Una 1-forma sobre $\varphi(\mathbf{X})$ es una función lineal Λ definida por: $\Lambda : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{T}^*\Omega_t \quad | \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_0, \Lambda_{\mathbf{X}} = \Lambda(\mathbf{X}) \in \mathbb{T}_{\varphi(\mathbf{X})}^*\Omega_t$

Definición B.2.7 (Operador Pull-back de una 1-forma) Sea $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ una función deformación, y sea β una 1-forma sobre $\varphi(\mathbf{X})$. Se define el pull-back de β , y se denota por $\phi^*\beta$, mediante la expresión (en forma indicial):

$$(\phi^*\beta)_A = F_A^a \beta_a(\varphi(\mathbf{X})) \quad (\text{B.13})$$

siendo $\{X^A\}$ coordenadas en Ω_0 y $\{x^a\}$ coordenadas en Ω_t , $F_A^a = \partial\varphi^a/\partial X^A$, $\beta_a = \beta \mathbf{e}_a$ y \mathbf{e}_a la base de $\mathbb{T}\Omega_t$.

Definición B.2.8 (Operador Push-forward de una 1-forma) *Teniendo en cuenta que las funciones deformación definidas en B.1.1 son regulares y por tanto existe la deformación inversa, φ^{-1} , a partir de la definición B.2.7, se define el operador push-forward de una 1-forma $\gamma \in \Omega_0$ como $\phi_*\gamma = (\phi^{-1})^*\gamma$*

Definición B.2.9 (Tensor) *Un tensor \mathcal{T} en $\mathbf{X} \in \Omega_0$, de orden $p + q$, y naturaleza p veces contravariante y q veces covariante ó $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, es una aplicación multilínea:*

$$\mathcal{T} : \underbrace{\mathbb{T}_{\mathbf{X}}^*\Omega_0 \times \dots \times \mathbb{T}_{\mathbf{X}}^*\Omega_0}_p \times \underbrace{\mathbb{T}_{\mathbf{X}}\Omega_0 \times \dots \times \mathbb{T}_{\mathbf{X}}\Omega_0}_q \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{B.14})$$

Si se emplea notación indicial, las componentes de \mathcal{T} se denotan por:

$$T^{A_1 A_2 \dots A_p}_{B_1 B_2 \dots B_q}$$

Definición B.2.10 (Tensor Lagrangiano) *Un tensor es lagrangiano o material cuando está definido en un punto \mathbf{X} de la configuración de referencia Ω_0 , y por lo tanto aplica sobre los elementos de los espacios $\mathbb{T}_{\mathbf{X}}$ y/o $\mathbb{T}_{\mathbf{X}}^*$. Por ejemplo, el tensor expresado en (B.14) es lagrangiano.*

Definición B.2.11 (Tensor Euleriano) *Un tensor es euleriano o espacial cuando está definido en un punto \mathbf{x} de la configuración deformada Ω_t , y por lo tanto aplica sobre los elementos de los espacios $\mathbb{T}_{\mathbf{x}}$ y/o $\mathbb{T}_{\mathbf{x}}^*$. Por ejemplo, el tensor:*

$$\mathbf{t} : \underbrace{\mathbb{T}_{\mathbf{x}}^*\Omega_0 \times \dots \times \mathbb{T}_{\mathbf{x}}^*\Omega_0}_l \times \underbrace{\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_0 \times \dots \times \mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_0}_m \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{B.15})$$

es un tensor euleriano, de orden $l + m$, y naturaleza l veces contravariante y m veces covariante ó $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$. Sus componentes se expresan en notación indicial:

$$t^{a_1 a_2 \dots a_l}_{b_1 b_2 \dots b_m}$$

Definición B.2.12 (Tensor Bipuntual) *Un tensor en $\mathbf{X} \in \Omega_0$ sobre una deformación $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$, de orden $p + q + l + m$ y naturaleza $\begin{pmatrix} p & l \\ q & m \end{pmatrix}$, es una aplicación lineal:*

$$\mathcal{T} : \underbrace{\mathbb{T}_{\mathbf{X}}^*\Omega_0 \times \dots \times \mathbb{T}_{\mathbf{X}}^*\Omega_0}_p \times \underbrace{\mathbb{T}_{\mathbf{X}}\Omega_0 \times \dots \times \mathbb{T}_{\mathbf{X}}\Omega_0}_q \times \underbrace{\mathbb{T}_{\mathbf{x}}^*\Omega_t \times \dots \times \mathbb{T}_{\mathbf{x}}^*\Omega_t}_l \times \underbrace{\mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t \times \dots \times \mathbb{T}_{\mathbf{x}}\Omega_t}_m \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{B.16})$$

y sus componentes son:

$$T^{A_1 A_2 \dots A_p}_{B_1 B_2 \dots B_q} \quad a_1 a_2 \dots a_l \quad b_1 b_2 \dots b_m$$

Definición B.2.13 (Push-forward y pull-back de un tensor) Sea la deformación $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ y \mathcal{T} un tensor en $\mathbf{X} \in \Omega_0$ de naturaleza p veces contravariante y q veces covariante. El push-forward de \mathcal{T} es un tensor, $\phi_* \mathcal{T}$, definido en $\varphi(\mathbf{X})$ como:

$$\phi_* \mathcal{T}(\mathbf{x}) \cdot (\alpha^1 \dots \alpha^p, v_1 \dots v_q) = \mathcal{T}(\mathbf{X}) \cdot (\phi^* \alpha^1 \dots \phi^* \alpha^p, \phi^* v_1 \dots \phi^* v_q) \quad (\text{B.17})$$

expresándose con \cdot el producto contraído y siendo:

$$\alpha^i : \mathbb{T}\Omega_t \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{B.18})$$

$$v_i : \mathbb{T}^* \Omega_t \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{B.19})$$

Se demuestra que las componentes de $\phi_* \mathcal{T}$ son:

$$(\phi_* \mathcal{T})^{a_1 a_2 \dots a_p}_{b_1 b_2 \dots b_q}(\mathbf{x}) = F^{a_1}_{A_1} \dots F^{a_p}_{A_p} (F^{-1})^{B_1}_{b_1} \dots (F^{-1})^{B_q}_{b_q} \mathcal{T}^{A_1 A_2 \dots A_p}_{B_1 B_2 \dots B_q}(\mathbf{X}) \quad (\text{B.20})$$

El pull-back de un tensor \mathbf{t} definido en $\varphi(\Omega_0)$ viene dado por $\phi^* \mathbf{t} = (\varphi^{-1})_* \mathbf{t}$, y sus componentes son:

$$(\phi^* \mathbf{t})^{A_1 A_2 \dots A_p}_{B_1 B_2 \dots B_q}(\mathbf{X}) = (F^{-1})^{A_1}_{a_1} \dots (F^{-1})^{A_p}_{a_p} (F^{-1})^{b_1}_{B_1} \dots (F^{-1})^{b_q}_{B_q} \mathbf{t}^{a_1 a_2 \dots a_p}_{b_1 b_2 \dots b_q}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.21})$$

Observación B.2.1 De análoga manera a como se ha definido el push-forward de los tensores lagrangianos, o el pull-back de los tensores eulerianos, es posible establecer estos operadores sobre los tensores bipuntuales: push-forward sobre los índices lagrangianos y pull-back sobre los eulerianos

B.3. Tensores de Deformación

Definición B.3.1 (Tensor de Cauchy-Green) En la configuración de referencia se define el tensor de Cauchy-Green mediante:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (\text{B.22})$$

que es un tensor material covariante en los dos índices.

Definición B.3.2 (Tensor de deformaciones de Green-Lagrange) A partir del tensor de Cauchy, se define el tensor de deformaciones de Green-Lagrange:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (\text{B.23})$$

Definición B.3.3 (Tensor de Finger) Análogamente a cómo se ha definido el tensor de Cauchy-Green en la configuración de referencia, en la configuración deformada se define el tensor de Finger:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (\text{B.24})$$

que es un tensor euleriano contravariante en los dos índices.

Observación B.3.1 *En este trabajo se sigue el criterio de denominar Tensor de Finger a \mathbf{b} (Marsden y Hughes, 1983). En algunos textos (Fung, 1965; Gurtin, 1981; Malvern, 1969) \mathbf{b} se denomina Tensor izquierdo de Cauchy-Green.*

Definición B.3.4 (Tensor de Deformaciones de Almansi) *A partir del tensor inverso del de Finger se define el tensor de deformaciones de Almansi como:*

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - (\mathbf{b}^{-1})) \quad (\text{B.25})$$

Corolario B.3.1 *Los tensores de deformaciones de Green-Lagrange y de Almansi están relacionados mediante los operadores push-forward y pull-back:*

$$\mathbf{e} = \phi_* \mathbf{E} \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{E} = \phi^* \mathbf{e} \quad (\text{B.27})$$

B.4. Objetividad

Definición B.4.1 *Sea un movimiento definido según (B.1). Un movimiento de sólido rígido de una configuración \mathcal{S}_t superpuesta a la configuración deformada en el instante t : $\mathcal{S}_t = \varphi_t(\Omega)$, es una función $\psi_t : \mathcal{S}_t \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:*

$$\mathbf{x} \in \mathcal{S}_t \rightarrow \mathbf{x}^+ = \psi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} \quad (\text{B.28})$$

siendo: $\mathbf{r} : t \rightarrow \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{Q} : t \rightarrow \mathbf{Q}(t) \in SO(3)$ funciones arbitrarias del tiempo.

Observación B.4.1 *La transformación ψ_t conserva los ángulos y las distancias*

Observación B.4.2 *En la definición (B.28) el tensor $\mathbf{Q}(t)$ está asociado a una rotación de la configuración \mathcal{S}_t considerándose fijo el sistema de referencia en que se define $\mathbf{Q}(t)$ (rotación activa). De manera alternativa se puede establecer la rotación del sistema de referencia considerando fija la configuración Ω_t (rotación pasiva)*

Definición B.4.2 *Un tensor espacial (o euleriano) se dice que es objetivo, si para los movimientos de sólido rígido definidos en (B.28), se transforma de acuerdo con las expresiones estándar del análisis tensorial.*

Ejemplo B.1 *El resultado de componer el movimiento de sólido rígido (B.28), con el movimiento de la configuración de referencia en el instante t , $\varphi(\mathbf{X}, t)$, es:*

$$\mathbf{x}^+ = \varphi^+(\mathbf{X}, t) = \psi_t[\varphi(\mathbf{X}, t)] = \mathbf{r}(t) + \mathbf{Q}(t)\varphi(\mathbf{X}, t) \quad (\text{B.29})$$

El gradiente de deformación del movimiento total es:

$$\mathbf{F}^+ = \nabla_{\mathbf{X}} \varphi^+ = \mathbf{Q}(t) \nabla_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{X}, t) \quad (\text{B.30})$$

Por tanto, el gradiente espacial de la velocidad \mathbf{v}^+ expresado en (B.9), resulta:

$$\mathbf{l}^+ = \dot{\mathbf{F}}^+ (\mathbf{F}^+)^{-1} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{l} \mathbf{Q}^T(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{Q}^T(t) \quad (\text{B.31})$$

De esta expresión se concluye que el tensor \mathbf{l} no es objetivo, ya que en la expresión de \mathbf{l}^+ aparece el término adicional $\dot{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{Q}^T(t)$

Los tensores lagrangianos permanecen inalterados para movimientos espaciales de sólido rígido. Por ejemplo, para el tensor de Cauchy-Green definido en (B.22):

$$\mathbf{C}^+ = (\mathbf{F}^+)^T \mathbf{F}^+ = \mathbf{F}^T \mathbf{Q}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{F} = \mathbf{C} \quad (\text{B.32})$$

En consecuencia, la derivada absoluta respecto del tiempo coincide en la configuración material y en la configuración rotada:

$$\dot{\mathbf{C}}^+ = \dot{\mathbf{C}} \quad (\text{B.33})$$

Sin embargo la derivada de los tensores espaciales, en general no retiene la objetividad tal y como se justifica en el siguiente

Ejemplo B.2 Sea un tensor de segundo orden, euleriano y objetivo \mathbf{A} y sea \mathbf{A}^+ el tensor obtenido al aplicar la transformación (B.28). Se verifica:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}(t) \mathbf{A} \mathbf{Q}^T(t) \quad (\text{B.34})$$

Derivando respecto del tiempo:

$$\dot{\mathbf{A}}^* = \mathbf{Q}(t) \left(\dot{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A} - \mathbf{A} \boldsymbol{\Omega} \right) \mathbf{Q}^T(t) \quad \text{siendo: } \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{Q}^T(t) \dot{\mathbf{Q}}(t) \quad (\text{B.35})$$

Por tanto, aunque el tensor \mathbf{A} es objetivo, su derivada temporal $\dot{\mathbf{A}}$ no lo es.

Para mantener la objetividad es necesario emplear las denominadas *derivadas objetivas*. Existen distintas definiciones de derivadas objetivas (derivada de Jaumann, derivada de Cotter-Rivlin, derivada de Truesdell, etc.), aunque a continuación únicamente se define la empleada en el desarrollo de esta tesis:

Definición B.4.3 (Derivada de Lie) Se define la derivada de Lie de un tensor \mathbf{z} como:

$$\mathcal{L}_v(\mathbf{z}) = \phi_* \left[\frac{\partial}{\partial t} (\phi^* \mathbf{z}) \right] \quad (\text{B.36})$$

Observación B.4.3 La derivada de Lie se puede interpretar como una operación que consta de tres pasos:

1. Pull-back cuyo resultado es un tensor $\mathbf{Z} = (\phi^* \mathbf{z})$ que aplica en los espacios asociados a la configuración de referencia

2. Derivada respecto del tiempo del tensor obtenido en el paso anterior:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \quad (\text{B.37})$$

3. Push-forward que transforma $\dot{\mathbf{Z}}$ en otro tensor que aplica sobre los mismos espacios que \mathbf{z} : $\mathcal{L}_v(\mathbf{z}) = \phi_*(\dot{\mathbf{Z}})$

Ejemplo B.3 Para un tensor de orden 2 que aplica sobre los espacios tangentes de la configuración deformada Ω_t (tensor espacial contra-contravariante), la expresión de la derivada de Lie es

$$\mathcal{L}_v(\mathbf{z}) = \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{l}^{-1} \mathbf{z} + \mathbf{z} \mathbf{l}^{-T} \quad (\text{B.38})$$

siendo \mathbf{l} el tensor gradiente espacial de la velocidad

Ejemplo B.4 Para un tensor de orden 2 que aplica sobre los espacios cotangentes de la configuración deformada Ω_t (tensor espacial cova-covariante), la expresión de la derivada de Lie es

$$\mathcal{L}_v(\mathbf{z}) = \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{l}^T \mathbf{z} + \mathbf{z} \mathbf{l} \quad (\text{B.39})$$

B.5. Tensor Velocidad de Deformación

Los tensores de velocidad de deformación se obtienen derivando respecto del tiempo los correspondientes tensores de deformación. Los tensores de Cauchy-Green y Green-Lagrange son lagrangianos con lo cual los correspondientes tensores de velocidad de deformación se obtienen simplemente derivando respecto del tiempo:

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \quad (\text{B.40})$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{B.41})$$

No sucede lo mismo, según se ha descrito en el apartado anterior, con los tensores de Finger y Almansi ya que hay que utilizar alguna derivada objetiva. De esta manera, se definen los siguientes tensores:

Definición B.5.1 (Tensor velocidad de deformación) Considerando una métrica ortonormal, el tensor velocidad de deformación \mathbf{d} se define como la derivada de Lie del tensor de deformaciones de Almansi:

$$\mathbf{d} = \phi_* \left(\frac{\partial(\phi^* \mathbf{e})}{\partial t} \right) \quad (\text{B.42})$$

Operando esta expresión y teniendo en cuenta que $\mathcal{L}_v(\mathbf{b}^{-1}) = \mathbf{0}$, se obtiene:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad (\text{B.43})$$

Observación B.5.1 *El tensor velocidad de deformación \mathbf{d} también se obtiene haciendo directamente el push-forward del tensor velocidad de deformación de Cauchy-Green:*

$$\mathbf{d} = \phi_* \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad (\text{B.44})$$

B.6. Tensores de Tensión

Tensor de tensiones de Cauchy

La configuración deformada del sólido definido al principio del apartado B.1 se divide en dos partes Ω_{t1} y Ω_{t2} , tal y como se indica en la figura B.2, con objeto de estudiar la acción que sobre Ω_{t1} ejercen las fuerzas aplicadas desde Ω_{t2} . Se considera un elemento diferencial de área da en un entorno del punto $\mathbf{p} = \varphi(\mathbf{P})$, cuya normal es \mathbf{n} . Se define el vector tensión \mathbf{t} en el punto \mathbf{p} correspondiente a la normal \mathbf{n} , como:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \frac{d\mathbf{f}}{da} \quad (\text{B.45})$$

siendo $d\mathbf{f}$ la fuerza que Ω_{t2} ejerce desde Ω_{t1} en el área da .

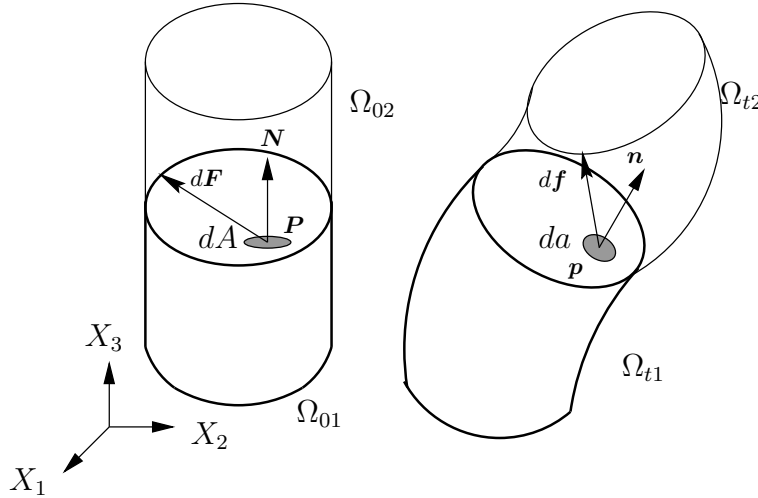


Figura B.2: Vector tensión

A partir de las ecuaciones de equilibrio y del principio de acción y reacción se establece la relación:

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} da \quad (\text{B.46})$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ se define como *tensor de tensiones de Cauchy*. Por tanto, el tensor $\boldsymbol{\sigma}$ permite calcular las fuerzas en un elemento diferencial de área deformada, da , cuya normal es \mathbf{n} .

Observación B.6.1 *El tensor de tensiones de Cauchy es un tensor definido en la configuración deformada; es decir, es un tensor euleriano*

Observación B.6.2 *Planteando el principio del momento cinético se obtiene que el tensor de tensiones de Cauchy es simétrico (a no ser que exista en el sólido una distribución continua de “pares”, como sucede en la teoría de Cosserat).*

Tensor de tensiones de Kirchhoff

Se define como:

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B.47})$$

siendo $J = \det(\mathbf{F})$ y $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones de Cauchy. La interpretación de $\boldsymbol{\tau}$ se puede hacer a partir del principio de los trabajos virtuales en la configuración deformada. Sean \mathbf{b} las fuerzas por unidad de volumen deformado y $\bar{\mathbf{t}}$ las tensiones impuestas en el contorno $\partial_T \Omega_t$. La expresión del referido principio es:

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega_t} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial_T \Omega_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (\text{B.48})$$

Expresando (B.48) respecto del volumen y área en la configuración de referencia a través de J :

$$\int_{\Omega_0} J\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial_T \Omega_0} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (\text{B.49})$$

donde:

$$\mathbf{B} = J\mathbf{b} \text{ son las fuerzas por unidad de volumen no deformado} \quad (\text{B.50})$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{t} \frac{da}{dA} \text{ son las tensiones impuestas por unidad de área no deformada } dA \quad (\text{B.51})$$

El trabajo virtual de las fuerzas internas en la expresión (B.49) es:

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \quad \boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B.52})$$

Primer tensor de Piola-Kirchhoff

Si la metodología descrita para obtener el tensor de Cauchy se aplica en la configuración de referencia, se llega a la expresión:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{P}N dA \quad (\text{B.53})$$

definiéndose \mathbf{P} como *Primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff*. La interpretación de \mathbf{P} es que aplicado a elementos de área orientada en la configuración de referencia ($d\mathbf{A} = dA\mathbf{N}$) se obtiene la fuerza interna sobre la misma, en la configuración deformada.

Observación B.6.3 *El tensor \mathbf{P} no es ni lagrangiano ni euleriano, es un tensor bipuntual.*

Observación B.6.4 *El tensor primero de Piola-Kirchhoff tiene el inconveniente de ser no simétrico.*

Segundo tensor de Piola-Kirchhoff

Transformando el vector tensión $d\mathbf{t}$ a la configuración de referencia, mediante el operador pull-back:

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{t} \quad (\text{B.54})$$

y sustituyendo (B.54) en (B.53):

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{N}dA = \mathbf{S}\mathbf{N}dA \quad (\text{B.55})$$

donde $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}$ se define como *Segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff*.

Observación B.6.5 *El tensor \mathbf{S} es un tensor lagrangiano.*

Observación B.6.6 *Si bien \mathbf{S} tiene la ventaja de ser simétrico, presenta el inconveniente de tener una interpretación poco intuitiva. Aplicando \mathbf{S} al elemento de área orientada de la configuración de referencia $d\mathbf{A}$, se obtiene el vector tensión \mathbf{T} , que no tiene interpretación física directa: es el pull-back a la configuración de referencia del vector tensión \mathbf{t} (a partir del que se obtiene la fuerza “real” \mathbf{f}).*

Observación B.6.7 *Los tensores de tensiones \mathbf{S} y $\boldsymbol{\tau}$ se pueden relacionar mediante los operadores pull-back y push-forward:*

$$\mathbf{S} = \phi^*\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T} \quad \boldsymbol{\tau} = \phi_*\mathbf{S} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T \quad (\text{B.56})$$

Si en (B.56) se sustituye la relación $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$ resulta:

$$\mathbf{S} = J\phi^*\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B.57})$$

El operador $J\phi^*$ se denomina Transformación de Piola

Apéndice C

Análisis Funcional

El objeto de este apéndice es definir y enunciar los conceptos y teoremas básicos del análisis funcional, que pueden ayudar a la lectura del capítulo 4. Para un estudio más detallado del tema se pueden consultar las siguientes referencias:

1. (Ciarlet, 1978). Este texto aborda las formulaciones de elementos finitos en problemas de tipo elíptico, haciendo uso a lo largo de todo el texto de los métodos de análisis funcional. En este trabajo se ha consultado especialmente la parte del libro dedicada a la estimación de error.
2. (Lebedev et al., 1996). Capítulo 1. Es un texto breve, conciso y sencillo. Cubre únicamente conceptos básicos.
3. (Marsden y Hughes, 1983). Capítulo 6. Este capítulo está orientado a los métodos de análisis funcional en elasticidad. Es un texto avanzado que excede ampliamente el tratamiento dado en este trabajo al análisis funcional. No obstante es una referencia adecuada para temas como la Forma de Dirichlet, análisis de la convexidad de funcionales, condiciones de elipticidad, etc.
4. (Oden, 1972). Capítulo 2. Trata en detalle ciertos aspectos del análisis funcional (espacios funcionales, diferenciabilidad, etc.) con énfasis en la relación con los métodos de elementos finitos.

C.1. Espacios Normados

Definición C.1.1 (Espacio Topológico)

Una topología definida en un conjunto V es un subconjunto $T \subset \mathcal{P}V$ (partes de V), tal que:

- I) Si $G_1, G_2 \in T$, entonces $G_1 \cap G_2 \in T$
- II) Si $\{G_\alpha, \alpha \in N\} \subset T$, entonces $\bigcup_{\alpha \in N} G_\alpha \in T$

III) $\emptyset \in T$ y $V \in T$

La combinación (V, T) es un espacio topológico. Los elementos de T se denominan conjuntos abiertos del espacio topológico.

Definición C.1.2 (Espacio Lineal)

Sea V un espacio topológico y K un cuerpo. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$, $\lambda, \mu \in K$. V es un espacio lineal topológico sobre K si se definen las operaciones:

- suma: $\mathbf{x} + \mathbf{y}$
- producto escalar: $\lambda \mathbf{x}$

tal que,

- I) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- II) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{y} + \mathbf{x}) + \mathbf{z}$
- III) $\exists \mathbf{0} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
- IV) $\lambda(\mu \mathbf{x}) = \lambda\mu \mathbf{x}$
- V) $1 \mathbf{x} = \mathbf{x}$; $0 \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- VI) $\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- VII) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$
- VIII) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}$

Definición C.1.3 (Norma)

Sea V un espacio lineal. La función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una norma si cumple:

- I) $\|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$; $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- II) $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in V, \forall \lambda \in K$
- III) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

Definición C.1.4 (Espacio lineal normado)

Sea V un espacio lineal. V es espacio lineal normado si $\forall \mathbf{x} \in V$, está definida $\|\mathbf{x}\|$

Definición C.1.5 (Seminorma)

Sea V espacio lineal. La función $|\cdot| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una seminorma si cumple:

- I) $|\mathbf{x}| \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$
- II) $|\lambda \mathbf{x}| = |\lambda| |\mathbf{x}| \quad \forall \mathbf{x} \in V, \forall \lambda \in K$

$$\text{III)} \quad |\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

Definición C.1.6 (Métrica)

Sea V espacio lineal. La función $d(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una métrica si cumple:

$$\text{I)} \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

$$\text{II)} \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

$$\text{III)} \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

$$\text{IV)} \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$$

Definición C.1.7 (Espacio métrico)

Se define un espacio métrico como el par (V, d) , siendo V un espacio lineal y d una métrica

Teorema C.1.1 Todo espacio lineal normado es espacio métrico

Definición C.1.8 (Sucesión convergente)

Sea V un espacio lineal normado y $\{\mathbf{x}_i\}$ un conjunto de infinitos elementos de V que en lo sucesivo lo denominaremos sucesión. La sucesión $\{\mathbf{x}_i\}$ tiene límite \mathbf{x} si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+ \mid \forall i > N(\varepsilon) \Rightarrow \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\| < \varepsilon$$

Se denota:

$$\mathbf{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i$$

y se dice que la sucesión es convergente o que converge a \mathbf{x}

Definición C.1.9 (Sucesión de Cauchy)

Sea $\{\mathbf{x}_i\}$ una sucesión definida en el espacio lineal normado V . $\{\mathbf{x}_i\}$ es una sucesión de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+ \mid \forall m, n > N(\varepsilon) \Rightarrow \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\| < \varepsilon$$

Definición C.1.10 (Espacio Normado Completo o Espacio de Banach)

Un espacio lineal normado V es completo o de Banach si todas las sucesiones de Cauchy definidas en V tienen límite perteneciente a V

Definición C.1.11 (Independencia lineal)

Sea V un espacio lineal. Los elementos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m \in V$ son linealmente independientes sobre \mathbb{R} si:

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_m \mathbf{x}_m = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0 \quad \forall c_i \in \mathbb{R}$$

En caso contrario $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ son linealmente dependientes.

Definición C.1.12 (Espacio lineal de dimensión finita)

Un espacio lineal V tiene dimensión finita si existe un número entero $N \geq 1$, tal que V contiene N elementos linealmente independientes, pero cualquier conjunto de $N + 1$ elementos es linealmente dependiente.

Lema C.1.1 Sea V un espacio lineal normado de dimensión N , y $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ un conjunto linealmente independiente de elementos de X . Se verifica:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \mid \forall c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}^+, \quad \|c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_N \mathbf{x}_N\| \geq c(|c_1| + |c_2| + \dots + |c_N|)$$

C.2. Operadores

Definición C.2.1 (Operador)

Sean V y W espacios lineales normados. Una correspondencia $\mathbf{A} : V \rightarrow W$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in V, \mathbf{y} \in W$ es un operador de V en W si a cada elemento \mathbf{x} de V le corresponde a lo sumo un elemento de W .

El conjunto de los elementos de V a los que le corresponde un elemento de W se denomina dominio de \mathbf{A} y se denota por $D(\mathbf{A})$.

$$D(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\}$$

El conjunto de elementos de W que son imagen de algún elemento de V se denomina rango de \mathbf{A} y se denota por $R(\mathbf{A})$

$$R(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in W \mid \mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\}$$

Definición C.2.2 (Funcional)

Un funcional es un operador \mathbf{A} que verifica $R(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}$ o $R(\mathbf{A}) \subset \mathbb{C}$. En lo sucesivo, consideraremos únicamente funcionales reales.

Definición C.2.3 (Continuidad)

Se \mathbf{A} un operador de V en W . El operador \mathbf{A} es continuo en $\mathbf{x}_0 \in X$ si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_V < \delta \Rightarrow \|\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0)\|_W < \varepsilon$$

Si \mathbf{A} es continuo en todos los puntos de $M \subset V$, se dice que \mathbf{A} es continuo en M

C.3. Operadores Lineales

En lo sucesivo supondremos que V y W son espacios lineales normados sobre el mismo cuerpo \mathbb{R} .

Definición C.3.1 (Subespacio Lineal)

Un espacio S es un subespacio lineal de un espacio lineal V , si S es espacio lineal y $S \subset V$

Definición C.3.2 (Operador Lineal)

El operador $\mathbf{A} : V \rightarrow W$ es lineal si $D(\mathbf{A})$ es subespacio lineal de V y $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D(\mathbf{A}), \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$\mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 \mathbf{A}(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 \mathbf{A}(\mathbf{x}_2)$$

Definición C.3.3 (Operador lineal acotado)

Sea $\mathbf{A} : V \rightarrow W$ un operador lineal. \mathbf{A} es acotado en $D(\mathbf{A})$ si:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \mid \forall \mathbf{x} \in D(\mathbf{A}), \quad \|\mathbf{A}(\mathbf{x})\|_W \leq c \|\mathbf{x}\|_V$$

El ínfimo de c se denomina *norma de \mathbf{A}* y se denota por $\|\mathbf{A}\|$:

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \in D(\mathbf{A})} \left\{ \frac{\|\mathbf{A}\|_W}{\|\mathbf{x}\|_V} \right\}$$

Teorema C.3.1 Sean V y W espacios de Banach. Sea $\mathbf{f} : V \rightarrow W$ aplicación lineal.

$$\mathbf{f} \text{ es continua} \Leftrightarrow \mathbf{f} \text{ está acotada}$$

El conjunto de todos los operadores lineales continuos de V en W se denota por $L(V, W)$

C.4. Producto interior

Definición C.4.1 (Producto interior o escalar)

Sea V un espacio lineal sobre \mathbb{R} . La función $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es un producto interior o escalar si $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ se verifica:

$$\text{I)} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0 \text{ y } \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$$

$$\text{II)} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$\text{III)} \quad (\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) \cdot \mathbf{z} = \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{z} + \mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{z}$$

siendo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Teorema C.4.1 El producto escalar cumple la desigualdad de Schwartz:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

Teorema C.4.2 $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2}$ es una norma

Definición C.4.2 (Ortogonalidad)

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Se dice que \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales si se verifica:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

C.5. Espacios de Lebesgue

Definición C.5.1 (Espacio Dual)

Sea V espacio de Banach. Se define el espacio dual V^* de V como el conjunto de todos los operadores lineales de V en \mathbb{R} :

$$V^* = L(V, \mathbb{R})$$

Definición C.5.2 (Espacio Reflexivo)

Un espacio de Banach es reflexivo si

$$V^{**} = V$$

Definición C.5.3 (Forma de dualidad)

Sea $f \in L(V, \mathbb{R})$. f es una forma de dualidad si $\exists v \in V^* \mid f(u) = v \cdot u$

Definición C.5.4 (Espacio de Hilbert)

Un espacio lineal V en el que se ha definido un producto interior es un espacio lineal normado V es Espacio de Hilbert si está dotado de un producto interior continuo con respecto al cual es completo.

Definición C.5.5 (Norma de Lebesgue de orden p)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un dominio de \mathbb{R}^m , abierto, acotado y con frontera suave. Sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, una función integrable según Riemann. Se define la norma de Lebesgue de orden p como:

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p d\Omega \right)^{\frac{1}{p}}$$

Teorema C.5.1 $\|\cdot\|_p$ es una norma

Definición C.5.6 (Espacio de Lebesgue de orden p en Ω)

El espacio de Lebesgue de orden p en Ω es el conjunto de funciones $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ cuya norma de Lebesgue de orden p está acotada:

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ integrables} \mid \|u\|_{L_p(\Omega)} < \infty\}$$

Teorema C.5.2 L^p es un espacio de Hilbert para $1 \leq p \leq \infty$

Teorema C.5.3

$$(L^p)^* = L^q \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 \leq p < \infty$$

Corolario C.5.1 $(L^1)^* = L^\infty$, $(L^\infty)^* \neq (L^1)$

Corolario C.5.2 L^p es reflexivo si $1 < p < \infty$. L^1 no es reflexivo

Corolario C.5.3 Sea $f \in (L^p)^*$

$$\exists v \in L^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ tal que } f(u) = \int_{\Omega} v \cdot u d\Omega$$

$f(u)$ se denomina funcional de trabajo

C.6. Espacios de Sobolev

Definición C.6.1 (Multi-índice)

Un multi-índice α es un elemento de $Z^+ \times Z^+ \times \underbrace{\cdots}_n \times Z^+$:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \underbrace{\cdots}_n \alpha_n), \quad \alpha_1, \alpha_2, \underbrace{\cdots}_n \alpha_n \in Z^+$$

siendo Z^+ el conjunto de los números enteros positivos

Definición C.6.2 (Grado de un multi-índice)

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \underbrace{\cdots}_n + \alpha_n$ es el grado del multi-índice α

Definición C.6.3 (Derivada parcial de grado α)

Sea una función $\mathbf{u} \in V$, $|\alpha|$ veces diferenciable. Se define la derivada parcial de grado α de \mathbf{u} como:

$$D^\alpha \mathbf{u} = \frac{\partial^{|\alpha|} \mathbf{u}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \underbrace{\cdots}_n \partial^{\alpha_n} x_n}$$

Definición C.6.4 (Semi-norma de Sobolev de grado s , orden p)

Sea $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ integrable según Riemann. Se define la Semi-norma de Sobolev de grado s y orden p de la función \mathbf{u} como:

$$|\mathbf{u}|_{s,p} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^s \int_{\Omega} |D^{|\alpha|} \mathbf{u}|^p d\Omega \right)^{\frac{1}{p}}$$

Definición C.6.5 (Norma de Sobolev de grado s , orden p)

Sea $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ integrable según Riemann. Se define la Norma de Sobolev de grado s y orden p de la función \mathbf{u} como:

$$\|\mathbf{u}\|_{s,p} = \sum_{|\alpha|=0}^s |\mathbf{u}|_{s,p}$$

Definición C.6.6 (Espacio de Sobolev de grado s , orden p)

$$W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) = \{\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad \text{integrables, tales que } \|\mathbf{u}\|_{s,p} < \infty\}$$

Teorema C.6.1 $W^{s,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ es espacio de Banach para $s \geq 0$ y $1 \leq p \leq \infty$

Teorema C.6.2 $H^s(\Omega, \mathbb{R}^m) = W^{s,2}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ es espacio de Sobolev para $s \geq 0$

Teorema C.6.3 $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) = W^{0,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ es espacio de Lebesgue $\forall p$

Corolario C.6.1 Sea $\mathbf{f} \in L(W^{s,p}, \mathbb{R}) = (W^{s,p})^*$. Entonces:

$$\exists \mathbf{v} \in W^{s,p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{s} = 1 \quad \text{tal que } \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} d\Omega$$

C.7. Cálculo variacional

Sea V espacio de Banach. Sea $\Pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Los principios variacionales establecen que los *estados de interés* (equilibrio, acción estacionaria, etc) son las funciones $\mathbf{u} \in V$ que minimizan (o al menos hacen estacionario) el funcional Π . Los principios variacionales que establecen la necesidad de que \mathbf{u} minimice Π se denominan *Principios de mínimo*. Los problemas fundamentales del cálculo de variaciones son:

1. Dado un principio variacional, determinar a qué problema de contorno equivale
2. Dado un problema de contorno, determinar si equivale a un principio de mínimo

Definición C.7.1 (Convexidad)

Sea V espacio de Banach y $\Pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Se dice que el funcional Π es convexo si verifica:

$$\Pi(\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2) \leq \lambda_1 \Pi(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 \Pi(\mathbf{u}_2) \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

Definición C.7.2 (Derivada de Gateaux)

Sea V espacio de Banach y $\Pi : V \rightarrow \mathbb{R} \mid \Pi(\mathbf{u}) < \infty \quad \forall \mathbf{u} \in V$. Sean $\mathbf{u}, \delta \mathbf{u} \in V$. La derivada de Gateaux de Π en \mathbf{u} según $\delta \mathbf{u}$ se define:

$$\delta \Pi(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}] = \frac{d}{d\varepsilon} \Pi(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})_{\varepsilon=0+}$$

Definición C.7.3 (Derivada según Frechet)

Π es derivable en \mathbf{u} según Frechet si existe $D\Pi(\mathbf{u}) \in V^*$ tal que:

$$D\Pi(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} = \delta \Pi(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}]$$

Esta definición implica que la derivada de Gateaux de Π sea una aplicación lineal acotada.

Definición C.7.4 (Segunda variación)

Siendo Π y $D\Pi$ diferenciables en \mathbf{u} según Frechet. La segunda variación de Π es:

$$\delta^2 \Pi(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v}] = D(D\Pi(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{v}$$

La segunda variación se denota $a(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v}]$

Teorema C.7.1 (Desarrollo de Taylor)

Sea Π dos veces diferenciable según Frechet en \mathbf{u} . $\Pi(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u})$ se puede expresar como

$$\Pi(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) = \underbrace{\Pi(\mathbf{u}) + \underbrace{D\Pi(\mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u}}_{1^{\text{a}} \text{ variación}}}_{\text{parte lineal de } \Pi \text{ en } \mathbf{u}} + \frac{1}{2} \delta^2 \Pi(\mathbf{u})[\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v}] + o(\|\delta \mathbf{u}\|^3)$$

Definición C.7.5 (Forma de Dirichlet)

La Forma de Dirichlet de Π en \mathbf{u} se define como $a(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}]$

Definición C.7.6 (Estabilidad)

Sea $a(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}]$ forma de Dirichlet de Π en \mathbf{u} . La forma de Dirichlet $a(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}]$ es estable si:

$$a(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}] > C\|\delta\mathbf{u}\|^2 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in V$$

Definición C.7.7 (Norma de energía)

Se define la Norma de energía de η como:

$$\|\delta\mathbf{u}\|_E = \sqrt{a(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}]}$$

Teorema C.7.2

La norma de energía es equivalente a la norma de Sobolev $\|\cdot\|_1$ definida en el espacio $H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$:

$$c\|\mathbf{u}\|_1 \leq \|\mathbf{u}\|_E \leq C\|\mathbf{u}\|_1 \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$$

Teorema C.7.3

Si $a(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}]$ es no singular, $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$

Definición C.7.8 (Ecuaciones de Euler-Lagrange)

Sea Π diferenciable en \mathbf{u} según Frechet y $\delta\mathbf{u} \in V$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange de Π son:

$$\delta\Pi(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}] = D\Pi(\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{u} = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in V$$

Definición C.7.9 (Derivada funcional)

Supongamos que existe el operador lineal acotado:

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\mathbf{u}} : V \rightarrow V^*$$

tal que se puede escribir:

$$\delta\Pi(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}] = \frac{\delta\Pi(\mathbf{u})}{\delta\mathbf{u}} \cdot \delta\mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u}, \delta\mathbf{u} \in V$$

El operador $\frac{\delta\Pi(\mathbf{u})}{\delta\mathbf{u}}$ se denomina derivada funcional de Π en \mathbf{u}

Definición C.7.10 (Mínimo relativo débil)

Dado $\Pi : V \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in V$ es un mínimo relativo débil si $\exists \delta > 0 \mid \Pi(\mathbf{v}) \geq \Pi(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in V$ siendo $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \delta$

Teorema C.7.4 (Punto estacionario)

Sea $\Pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable según Frechet. Sea $\mathbf{u} \in V$ un mínimo relativo débil de Π . Entonces:

$$\frac{\delta\Pi(\mathbf{u})}{\delta\mathbf{u}} = 0$$

Corolario C.7.1

Si Π es diferenciable según Frechet, una condición necesaria para que \mathbf{u} sea mínimo relativo débil es que se cumplan las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Teorema C.7.5

Sea $\Pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable dos veces según Frechet. Sea \mathbf{u} una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange de Π .

Si $\exists c > 0 \mid a(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}] > c\|\delta\mathbf{u}\|^2, \quad \forall \delta\mathbf{u} \in V \Rightarrow \mathbf{u}$ es un mínimo relativo de Π

Definición C.7.11 (Forma débil)

Sea \mathbf{A} un operador diferencial, $\mathbf{A} : V \rightarrow V^$. Suponiendo que existe un operador lineal $G(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}] : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, acotado en $\delta\mathbf{u}$, tal que:*

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{u} = G(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}]$$

entonces, $G(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}]$ se denomina forma débil de \mathbf{A} .

Teorema C.7.6 (Teorema de Veinberg)

Sea $\mathbf{A} : V \rightarrow V^$ y sea $G(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}]$ su forma débil. Si G verifica:*

$$\delta G(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}] = \delta G(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}] \quad \forall \delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{v} \in V$$

entonces, existe un funcional $\Pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$G(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}] = \delta\Pi(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}]$$

La expresión del funcional Π es:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_0^1 G(t \cdot \mathbf{u})[\mathbf{u}] dt$$

Si la forma de Dirichlet $a(\mathbf{u})[\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}]$ es estable, entonces:

- I) Π es convexo
- II) Π tiene un mínimo relativo y es único

Definición C.7.12 (Desigualdad de Poincaré)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, abierto, acotado, suave y $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$. Se cumple:

$$\exists C \in \mathbb{R}^+ \mid \|\mathbf{u}\|_p \geq C\|\mathbf{u}\|_{1,p}$$

Teorema C.7.7

$\|\cdot\|_{1,p}$ y $\|\cdot\|_{1,p}$ son equivalentes. Es decir:

$$\exists c, C \in \mathbb{R}^+ \mid c\|\mathbf{u}\|_{1,p} \leq \|\mathbf{u}\|_{1,p} \leq C\|\mathbf{u}\|_{1,p} \quad \forall \mathbf{u} \in V$$

Bibliografía

- ABAQUS. *THEORY MANUAL. Version 5.5*. Hibbit, Karlson and Sorensen, Inc, 1994.
- AINSWORTH, M., ZHU, J., CRAIG, A. y ZIENKIEWICZ, O. Analysis of the zienkiewicz-zhu a-posteriori error estimator in the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 28:págs. 2161–2174, 1989.
- ANDELFINGER, U., RAMM, E. y ROEHL, D. 2d- and 3d- enhanced assumed strain elements and their application in plasticity. En R. Owen, E. Oñate y E. Hinton, eds., *Computational Plasticity*, págs. 1997–2007. Pineridge Press, 1992.
- ANTMAN, S. S. Non equilibrium states for bars in tension. *Journal of Mathematical Analysis Applications*, tomo 44:págs. 333–349, 1973.
- ARMERO, F. A modal analysis of finite deformation enhanced strain finite elements. Inf. téc., University of California at Berkeley, 1996a. Report UCB/SEMM-1996/03.
- ARMERO, F. On the method of incompatible modes and the enhanced strain formulation, 1996b. Lecture slides. IIT.
- ARMERO, F. y GARIKIPATI, K. An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids. *International Journal of Solids and Structures*, tomo 33, nº 20–22:págs. 2863–2885, 1996.
- ARMERO, F. y GLASER, S. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. *Engineering Computations*, tomo 14:págs. 759–791, 1997.
- ARUNAKIRINATHAR, K. y REDDY, B. Enhanced strain finite element methods. En D. Owen, E. Oñate y E. Hinton, eds., *Computational Plasticity*, págs. 321–332. Pineridge Press Ltd. Swansea UK, Barcelona, 1995.
- BABUŠKA, I. The problem of modeling the elastomechanics in engineering. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 82:págs. 257–280, 1990.

- BABUŠKA, I. y RHEINBOLDT, W. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, tomo 15:págs. 736–754, 1978a.
- BABUŠKA, I. y RHEINBOLDT, W. A posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 12:págs. 1597–1613, 1978b.
- BABUŠKA, I., STROUBOULISAND, T., UPADHYAY, C., GANGARAJ, S. y COPPS, K. Validation of a posteriori error estimators by numerical approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 37:págs. 1073–1124, 1994.
- BABUŠKA, I., ZIENKIEWICZ, O., GAGO, J. y OLIVEIRA, A., eds. *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*. John Wiley & Sons, 1986.
- BAŽANT, Z. y PIJAUDIER-CABOT, G. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics*, tomo 55:págs. 287–293, 1988.
- BAKER, M. y ERICKSEN, J. Inequalities restricting the form of the stress-deformation relations for isotropic elastic solids and reissner-rivlin fluids. *J. Wash. Acad. Sc.*, tomo 44:págs. 33–35, 1954.
- BANK, R. y WEISER, A. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation*, tomo 44:págs. 283–301, 1985.
- BÄNSCH, E. y SIEBERT, K. A posteriori error estimation for nonlinear problems by duality techniques. Inf. téc., Institut für Angewandte Mathematik, Freiburg. Germany, 1995. Internal Report.
- BARTHOLD, F., SCHMIDT, M. y STEIN, E. Error indicators and mesh refinements for finite-element-computations of elastoplastic deformations. *Computational Mechanics*, tomo 22, nº 3:págs. 225–238, 1998.
- BELTRÁN, F. *Estimadores de error basados en principios variacionales multicampo para cálculos por elementos finitos*. Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica de Madrid, 1990.
- BELTRÁN, F. y ALARCÓN, E. Estimación del error de discretización con principios variacionales multicampo: I. elasticidad. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, tomo 8, nº 2, 1992.
- BERGAN, P. y NYGÄRD, M. Finite elements with increased freedom in choosing shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 20:págs. 643–663, 1984.

- BONET, J. y WOOD, R. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, 1997.
- BRAESS, D. *Finite elements. Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*. Cambridge University Press, 1997.
- BRIDGMAN, P. The stress distribution at the neck of a tensile specimen. *Transactions of the American Society of Metals*, tomo 32:págs. 553–574, 1944.
- BRINK, U. y STEIN, E. A posteriori error estimation in large-strain elasticity using equilibrated local neumann problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 161:págs. 77–101, 1998.
- CAMACHO, G., MARUSICH, T. y ORTIZ, M. Modelling of high-speed machining and ballistic penetration. En D. Owen, E. Oñate y E. Hinton, eds., *Computational Plasticity*. Pineridge Press Ltd. Swansea UK, Barcelona, 1995.
- CASEY, J. y NAGHDI, P. A remark on the use of decomposition $\mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$ in plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, tomo 47:págs. 672–675, 1980.
- CESAR, J. y NATAL, R. New enhanced strain elements for incompressible problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 44:págs. 229–248, 1999.
- CHEN, W. y SALEEB, A. *Constitutive equations for engineering materials*, cap. 7. Wiley, 1982.
- CIARLET, P. *The finite element method for elliptic problems*. North Holland, 1978.
- CRISFIELD, M., MOITA, G., JELENIC, G. y LYONS, L. Enhanced lower-order element formulations for large strains. En D. Owen, E. Oñate y E. Hinton, eds., *Computational Plasticity*, págs. 333–348. Pineridge Press Ltd. Swansea UK, Barcelona, 1995.
- DAVIDENKOV, N. y SPIRIDONOVA, N. Analysis of the state of stress in the neck of a tension test specimen. En *Proceedings of American Society of Testing Materials*, tomo 46, págs. 1147–1158. 1946.
- DE BORST, R., SLUYS, L., MUHLHAUS, H. y PAMIN, J. Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations*, tomo 10:págs. 99–121, 1993.
- DEUFLHARD, P., LEINEN, P. y YSERENTANT, H. Concepts of an adaptive hierarchical finite element code. *Impact of Computing in Science and Engineering*, tomo 1:págs. 3–35, 1989.

- ENGELMAN, B. y HALLQUIST, J. *NIKE2D. A nonlinear, implicit, two-dimensional finite element code for solid mechanics. User Manual*. Lawrence Livermore National Laboratory, 1991.
- FELIPPA, C. Parametrized multifield variational principles in elasticity: Part i - mixed formulations. *Communications in Applied Numerical Methods*, tomo 5:págs. 79–88, 1989a.
- FELIPPA, C. Parametrized multifield variational principles in elasticity: Part ii - hybrid functionals and the free formulation. *Communications in Applied Numerical Methods*, tomo 5:págs. 89–98, 1989b.
- FELIPPA, C. Desarrollos recientes en elementos de alto rendimiento basados en la formulación libre. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, tomo 7:págs. 3–28, 1991.
- FELIPPA, C. A survey of parametrized variational principles and applications to computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 113:págs. 109–139, 1994.
- FELIPPA, C. y MILITELLO, C. The andes formulation of finite elements. En G. Winter y M. Galante, eds., *Memorias del I Congreso sobre Métodos Numéricos en Ingeniería*. SEMNI, Las Palmas de Gran Canaria, 1990a.
- FELIPPA, C. y MILITELLO, C. Principios variacionales parametrizados en elasticidad lineal. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, tomo 6:págs. 333–342, 1990b.
- FUNG, Y. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall Inc, 1965.
- GABALDÓN, F. y GOICOLEA, J. Contribution of incompatible modes in elastic-plastic and localisation problems, 1998. IV World Congress on Computational Mechanics.
- GARINO, C. G. *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*. Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona, 1993.
- GLASER, S. y ARMERO, F. Recent developments in the formulation of assumed enhanced strain finite elements for finite deformation problems. Inf. téc., University of California at Berkeley, 1995. Report UCB/SEMM-1995/13.
- GOICOLEA, J. *Numerical modelling in large strain plasticity with application to tube collapse analysis*. Tesis Doctoral, University of London, 1985.
- GOICOLEA, J. *PRZ. User's Guide*. Dpto. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 1988.

- GOICOLEA, J. *PR2D User's Guide*. Dpto. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 1990.
- GOICOLEA, J., GABALDÓN, F. y GARINO, C. G. Interpretación de la estricción en el ensayo de tracción empleando modelos hipoeelásticos e hiperelásticos. En M. Doblaré, J. Correas, E. Alarcón, L. Gavete y M. Pastor, eds., *Memorias del III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*. SEMNI, Zaragoza, 1996.
- GREEN, A. y NAGHDI, P. A general theory of elastic-plastic continuum. *Archive Rational Mechanics Analysis*, tomo 18:págs. 251–281, 1965.
- GURTIN, M. *An introduction to continuum mechanics*. Academic Press, 1981.
- HILL, R. *The mathematical theory of plasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1950.
- HILL, R. On the uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain. *Journal of Mechanics, Physics and Solids*, tomo 5:págs. 229–241, 1957.
- HILL, R. Acceleration waves in solids. *Journal of Mechanics, Physics and Solids*, tomo 16:págs. 1–10, 1962.
- HUGHES, T. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and non linear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 15:págs. 1413–1418, 1980.
- HUGHES, T. *The Finite Element Method. Linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall International Editions, 1987.
- IBRAHIMBEGOVIC, A. y WILSON, E. A modified method of incompatible modes. *Communications in Applied Numerical Methods*, tomo 7:págs. 187–194, 1991.
- IRONS, B. y LOIKKANEN, M. An engineer's defense of the patch test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 19:págs. 1391–1401, 1983.
- IRONS, B. y RAZZAQUE, A. Experience with the patch test for convergence of finite element methods. En A. Aziz, ed., *Mathematical foundations of the finite element method*, págs. 557–587. Academic Press, 1972.
- JETTEUR, P. y CESCOTTO, S. A mixed fe for the analysis of large inelastic strains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 31:págs. 229–239, 1991.

- JOHNSON, C. y HANSBO, P. Adaptive finite element methods in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 101:págs. 143–181, 1992.
- KASPER, E. y TAYLOR, R. A mixed-enhanced strain method: linear problems. Inf. téc., University of California at Berkeley, 1997a. Report UCB/SEMM-97/02.
- KASPER, E. y TAYLOR, R. A mixed-enhanced strain method: non linear problems. Inf. téc., University of California at Berkeley, 1997b. Report UCB/SEMM-97/02.
- KORELC, J. y WRIGGERS, P. Consistent gradient formulation for a stable enhanced strain method for large deformations. *Engineering Computations*, tomo 13:págs. 103–123, 1996.
- KRAVTCHENKO, J. y SIRIEYSJ, P. Conditions de stabilité et postulat de drucker. En J. Mandel, ed., *Reology and Soil Mechanics*, págs. 58–68. IUTAM Symposium, Grenoble, 1964.
- LEBEDEV, L., VOROVICH, I. y GLADWELL, G. *Functional Analysis. Applications in Mechanics and Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- LEE, E. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, tomo 36:págs. 1–6, 1969.
- LEROY, Y. y ORTIZ, M. Finite element analysis of strain localization in frictional materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, tomo 13:págs. 53–74, 1989.
- LEROY, Y. y ORTIZ, M. Finite element analysis of transient strain localization phenomena in frictional solids. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, tomo 14:págs. 93–124, 1990.
- LORET, B. y PREVOST, J. Dynamic strain localization in elasto-(visco-)plastic solids, part 1. general formulation and one-dimensional examples. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 83:págs. 247–273, 1990.
- LUBLINER, J. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Company, 1990.
- MALVERN, L. *Introduction to Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, 1969.
- MANZOLI, O. *Un modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes en la mecánica de sólidos*. Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 1998.

- MAPLE, V. *Language Reference Manual*, 1991a.
- MAPLE, V. *Library Reference Manual*, 1991b.
- MARSDEN, E. y HUGHES, T. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, 1983.
- MARTINEZ, F. *Análisis de fenómenos de localización de deformaciones en materiales cohesivo-friccionales*. Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, 1993.
- MC MECKING, R. y RICE, J. Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. *International Journal of Solids and Structures*, tomo 11:págs. 601–616, 1975.
- MILITELLO, C. y FELIPPA, C. A variational justification of the assumed natural strain formulation of finite elements. i. variational principles. *Computer & Structures*, tomo 34, nº 3:págs. 431–438, 1990a.
- MILITELLO, C. y FELIPPA, C. A variational justification of the assumed natural strain formulation of finite elements. ii. the c^0 four node plate element. *Computer & Structures*, tomo 34, nº 3:págs. 439–444, 1990b.
- MOITINHO, J. y TEIXEIRA, J. Continuity conditions for finite element analysis of solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 33:págs. 845–853, 1992.
- MORAN, B., ORTIZ, M. y SHIH, F. Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 29:págs. 483–514, 1990.
- MÜHLHAUS, H. y VARDOULAKIS, I. The thickness of shear bands in granular materials. *Géotechnique*, tomo 37, nº 3:págs. 271–283, 1987.
- NAGTEGAAL, J. y DE JONG, J. Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 17, 1981.
- NAGTEGAAL, J. y FOX, D. Using assumed enhanced strain elements for large compressive deformation. *International Journal of Solids and Structures*, tomo 33, nº 20-22:págs. 3151–3159, 1996.
- NAGTEGAAL, J., PARKS, D. y RICE, J. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 4:págs. 153–177, 1974.
- NEEDLEMAN, A. A numerical study of necking in circular cylindrical bars. *Journal of Mechanics, Physics and Solids*, tomo 20:págs. 111–127, 1972.

- NEEDLEMAN, A. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 67:págs. 69–85, 1988.
- NORRIS, D., MORAN, B., SCUDDER, J. y QUIÑONES, D. A computer simulation of the tension test. *Journal of Mechanics, Physics and Solids*, tomo 26:págs. 1–19, 1978.
- ODEN, J. *Finite elements of nonlinear continua*. Mc Graw-Hill, 1972.
- OLIVER, J., CERVERA, M. y MANZOLI, O. On the use of j2 plasticity models for the simulation of 2d strong discontinuities in solids. En D. Owen, E. Oñate y E. Hinton, eds., *Computational Plasticity*. Pineridge Press Ltd. Swansea UK, Barcelona, 1997.
- ORTIZ, M., LEROY, Y. y NEEDLEMAN, A. A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 61:págs. 189–214, 1987.
- ORTIZ, M. y MARTIN, J. Symmetry-preserving return mapping algorithms and incrementally external paths: A unification of concepts. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 67, nº 1:págs. 69–85, 1988.
- ORTIZ, M. y POPOV, E. Distorsional hardening rules for metal plasticity. *Journal of Engineering Mechanics*, tomo 109, nº 4:págs. 1042–1057, 1983.
- ORTIZ, M. y QUIGLEY, J. Adaptive mesh refinement in strain localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 90:págs. 781–804, 1991.
- ORTIZ, M. y STAINIER, L. The variational formulation of viscoplastic constitutive updates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998. In press.
- PERIĆ, D., YU, J. y OWEN, D. On error estimates and adaptivity in elastoplastic solids: applications to the numerical simulation of strain localization in classical and cosserat continua. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 37:págs. 1351–1379, 1994.
- PIAN, T. y SUMIHARA, K. Rational approach for assumed stress finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 20:págs. 1685–1695, 1984.
- PONTHOT, J. *Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis*. Tesis Doctoral, Universidad de Lieja, Bélgica, 1994.

- PRANDTL, L. Ueber die harte plastischer Körper. *Math. Phys. Kl*, 1920.
- PREVOST, J. y LORET, B. Dynamic strain localization in elasto-(visco-)plastic solids, part 2. plain strain examples. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 83:págs. 275–294, 1990.
- RADOVITZKY, R. y ORTIZ, M. Error estimation and adaptive meshing in strongly nonlinear dynamic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998. In press.
- RICE, J. The localization of plastic deformations. En W. Koiter, ed., *Theoretical and applied mechanics*, págs. 207–219. 1976.
- ROEHL, D. y RAMM, E. Large elasto-plastic finite element analysis of solids and shells with the enhanced assumed strain concept. *International Journal of Solids and Structures*, tomo 33, nº 20–22:págs. 3215–3237, 1996.
- RUDNICKI, J. y RICE, J. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of Mechanics, Physics and Solids*, tomo 23:págs. 371–394, 1975.
- SALAS, J. J., DE JUSTO ALPAÑES, J. y GONZALEZ, A. S. *Geotecnia y Cimientos II*. Ed. Rueda, 1981.
- SHEPHARD, M., BAEHMANN, P., GEORGES, M. y KORNGOLD, E. Framework for the reliable generation and control of analysis idealizations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 82:págs. 257–280, 1990.
- SIMÓ, J. A framework for finite strains elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. part i: Continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 66:págs. 199–219, 1988a.
- SIMÓ, J. A framework for finite strains elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. part ii: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 68:págs. 1–31, 1988b.
- SIMÓ, J. Topics on the numerical analysis and simulation of plasticity. En P. Ciarlet y J. Lions, eds., *Handbook of numerical analysis*, tomo 3. Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland), 1994. Preprint.
- SIMÓ, J. y ARMERO, F. Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 110:págs. 359–386, 1993.

- SIMÓ, J., ARMERO, F. y TAYLOR, R. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3d finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 110:págs. 359–386, 1993a.
- SIMÓ, J. y HUGHES, T. On the variational foundations of assumed strain methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 53:págs. 51–54, 1986.
- SIMÓ, J. y HUGHES, T. General return mapping algorithms for rate independent plasticity, 1991. Non Linear Finite Element Analysis Short Course. T. Belytschko and T.J.R. Hughes. Zace Services.
- SIMÓ, J. y HUGHES, T. *Computational inelasticity*. Springer, 1998.
- SIMÓ, J. y OLIVER, J. A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids. En Z. e. a. Bažant, ed., *Fracture and damage in quasi-brittle materials*. Prague, 1994.
- SIMÓ, J., OLIVER, J. y ARMERO, F. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, tomo 12:págs. 277–296, 1993b.
- SIMÓ, J. y ORTIZ, M. A unified approach to finite deformation analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 49:págs. 222–235, 1985.
- SIMÓ, J. y RIFAI, S. A class of mixed assumed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 29:págs. 1595–1638, 1990.
- SIMÓ, J. y TAYLOR, R. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 48:págs. 101–118, 1985.
- SOUZA, E., PERIC, D., HUANG, G. y OWEN, D. Remarks on the stability of enhanced strain elements in finite elasticity and elastoplasticity. En D. Owen, E. Oñate y E. Hinton, eds., *Computational Plasticity*, págs. 361–372. Pineridge Press Ltd. Swansea UK, Barcelona, 1995.
- STEIN, E., SCHMIDT, M. y BARTHOLD, F. Theorie und algorithmen adaptiver fe-methoden für elastoplastische deformationen. En *Adaptive finite element methoden in der angewandten mechanik*. 1997.
- STEINMANN, P. y WILLAM, K. Performance of enhanced finite element formulations in localized failure computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 90:págs. 845–867, 1990.

- STEINMANN, P. y WILLAM, K. Finite elements for capturing localized failure. *Archive Applied Mechanics*, tomo 61:págs. 259–275, 1991.
- STEINMANN, P. y WILLAM, K. Finite-element analysis of elastoplastic discontinuities. *Journal of Engineering Mechanics*, tomo 120, nº 11:págs. 2428–2441, 1994.
- STRANG, G. y FIX, G. *An analysis of the Finite Element Method*. Englewood Cliffs N.J.: Prentice Hall, 1973.
- STUMMEL, F. The limitations of the patch test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 15:págs. 177–188, 1980.
- SZABÓ, B. *PROBE. Theoretical Manual, Release 1.0*. MO: Noetic Technologies Corp., St.Louis, 1985.
- SZABÓ, B. The use of a priori estimates in engineering computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 82:págs. 139–154, 1990.
- SZABÓ, B. y BABUŠKA, I. *Finite element analysis*. John Wiley & sons, 1991.
- TAYLOR, R. 1999. <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt>.
- TAYLOR, R., BERESFORD, P. y WILSON, E. A non conforming element for stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 10:págs. 1211–1219, 1976.
- TAYLOR, R., SIMÓ, J., ZIENKIEWICZ, O. y CHAN, A. The patch test-a condition for assesing fem convergence. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 22:págs. 39–62, 1986.
- TEIXEIRA, J., MOITINHO, J. y RIBEIRO, E. Non-conventional formulations for the finite element method, 1998. Submmited to Computational Mechanics.
- TERZAGHI, R. *Theoretical soil mechanics*. John Wiley & Sons, 1943.
- TRUESDELL, C. y TOUPIN, R. The classical field theories. En *Encyclopedia of Physics*, tomo 3/1. Springer Verlag, 1960.
- TURNER, M., CLOUGH, H., MARTIN, H. y TOPP, L. Stiffnes and deflection analysis of complex structures. *J. Aero. Sci.*, tomo 23, nº 9, 1956.
- VARDOULAKIS, I. Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial tests. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, tomo 4, nº 2:págs. 103–119, 1980.

- VERMEER, P. y DE BORST, R. Non-associated plasticity for soils, concrete and rock. *HERON*, tomo 29, nº 3, 1984.
- WASHIZU, K. *Variational Methods in Elasticity & Plasticity*. Pergamon Press, 3 ed^{ón}., 1982.
- WILKINS, M. Third progress report of light armor program. Inf. téc., Lawrence Livermore National Laboratory. University of California, 1968. Rept. UCRL-50460.
- WILSON, E., TAYLOR, R., DOHERTY, W. y GHABOUSSI, J. *Incompatible displacement models*. Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics. Academic Press, 1973.
- WRIGGERS, P. y REESE, S. A note on enhanced strain methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, tomo 135, nº 3-4:págs. 201–209, 1996.
- ZIENKIEWICZ, O., CHAN, A., PASTOR, M., SCHREFLER, B. y SHIOMI, T. *Computational Geomechanics*. Wiley, 1998.
- ZIENKIEWICZ, O., HUANG, M. y PASTOR, M. Localization problems in plasticity using finite elements with adaptive remeshing. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, tomo 19:págs. 127–148, 1995.
- ZIENKIEWICZ, O., LIU, Y. y HUANG, G. Error estimation and adaptivity in flow formulation for forming problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 25:págs. 23–42, 1988.
- ZIENKIEWICZ, O., LIU, Y. y HUANG, G. Error estimates and convergence rates for various incompressible elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 28:págs. 2191–2202, 1989.
- ZIENKIEWICZ, O. y MORGAN, K. *Finite elements and approximation*. John Wiley and Sons, 1983.
- ZIENKIEWICZ, O. y TAYLOR, R. *The finite element method*, tomo 1–2. McGraw-Hill, 4 ed^{ón}., 1989.
- ZIENKIEWICZ, O. y ZHU, J. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, tomo 24:págs. 337–357, 1987.